DANIEL VLĂDUCU
MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

Ediţia a IV-a

Editura Paralela 45

Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
VLĂDUCU, DANIEL
Memorator de matematică pentru clasele IX-XII /
Daniel Vlăducu, Márta Kása. – Ed. a 4-a. –
Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4249-3
I. Kása, Márta
51

CUPRINS

ALGEBRĂ

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
- $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right),\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right),\ \forall n \in 2\mathbb{N}+1$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\frac{1}{2}\cdot\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac)\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a).$

SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

MODULUL

Definiție: Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanţa, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului şi origine.

$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ şi $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R};$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$
- $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$
- $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$
- $\left||x| - |y|\right| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|;\ \exists$ „=" $\Leftrightarrow\ xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0;$

- $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ şi $\max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

PARTEA ÎNTREAGĂ, PARTEA FRACȚIONARĂ

Definiții:

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul x şi se notează $\left[x\right]$.

Partea fracţionară a lui x se notează $\left\{x\right\}$ şi $\left\{x\right\}=x-\left[x\right]$.

Proprietăți:

- $\left[x\right]=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$;
- $\left\{x\right\}=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$;
- $\left[m+x\right]=m+\left[x\right],\ \forall m\in\mathbb{Z}$;
- $\left\{m+x\right\}=\left\{x\right\},\ \forall m\in\mathbb{Z}$;
- $x-1<\left[x\right]\le x<\left[x\right]+1$;
- $[x]+\left[x+\dfrac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\dfrac{n-1}{n}\right]=\left[nx\right],\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge 2$ **(Hermite)**.

INEGALITĂȚI REMARCABILE

- Dacă $a\cdot b>0$, atunci $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$.
- $x\cdot y\le\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$;

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;
- $3 \cdot \left(xy + yx + zx\right) \leq \left(x + y + z\right)^2 \leq 3 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$, unde

$$m_h = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \text{ (media armonică)},$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \text{ (media geometrică)},$$

$$m_a = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \text{ (media aritmetică)},$$

$$m_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}{n}} \text{ (media pătratică)}.$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \leq \left({a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2\right) \cdot \left({b_1}^2 + \ldots + {b_n}^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2$$

Inegalitatea lui Minkowski

$$\sqrt{(x+y)^2+\left(a+b\right)^2} \le \sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîşev

Dacă $\left(a_k\right)_{k\ge 1}$, $\left(b_k\right)_{k\ge 1}$ sunt două şiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \le n \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cdot b_k\right),$$

iar dacă $\left(a_k\right)$, $\left(b_k\right)$ sunt două şiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \ge n \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cdot b_k\right).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$\left(1+\alpha\right)^r \ge 1+r\alpha,\ \ \forall\ \alpha,\ r\in\mathbb{R},\ \alpha\ge -1,\ r\ge 0$

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULŢIMI

● Se numeşte propoziţie, în sensul logicii matematice, un enunţ care, într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Valoare de adevăr, tabele de adevăr

p	q	$\rceil$ p	p $\vee$ q	p $\wedge$ q	p $\to$ q	p $\leftrightarrow$ q
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

● Se numeşte predicat un enunţ care depinde de una sau mai multe variabile şi care devine propoziţie oricum am înlocui variabilele cu valori alese dintr-o mulţime.