

DANIEL VLĂDUCU  
MÁRTA KÁSA

# MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

*Ediția a IV-a*

**Editura Paralela 45**

Redactare: Daniel Mitran  
Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**VLĂDUCU, DANIEL**

**Memorator de matematică pentru clasele IX-XII /**

Daniel Vlăducu, Márta Kása. – Ed. a 4-a. –

Pitești : Paralela 45, 2025

ISBN 978-973-47-4249-3

I. Kása, Márta

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

# CUPRINS

---

|  |    |
|--|----|
| <b>ALGEBRĂ</b> .....                                     | 9  |
| 1. Formule de calcul prescurtat .....                    | 9  |
| 2. Sume remarcabile .....                                | 9  |
| 3. Modulul .....   | 10 |
| 4. Partea întreagă, partea fracționară.....              | 11 |
| 5. Inegalități remarcabile .....                         | 11 |
| 6. Elemente de logică matematică, mulțimi .....          | 13 |
| 7. Inducție matematică, probleme simple de numărare..... | 14 |
| 8. Puteri și radicali .....                              | 14 |
| 9. Logaritmi .....                                       | 15 |
| 10. Progresii aritmetice, progresii geometrice.....      | 16 |
| 11. Elemente de combinatorică.....                       | 17 |
| 12. Binomul lui Newton.....                              | 18 |
| 13. Funcții, funcția de gradul I.....                    | 18 |
| 14. Ecuația de gradul al II-lea.....                     | 20 |
| 15. Funcția de gradul al II-lea.....                     | 21 |
| 16. Funcții injective, surjective, bijective .....       | 24 |
| 17. Funcția putere, funcția radical, ecuații .....       | 24 |
| 18. Funcția exponențială, funcția logaritmică .....      | 25 |
| 19. Funcții trigonometrice.....                          | 26 |
| 20. Matematici financiare .....                          | 27 |
| 21. Elemente de statistică.....                          | 28 |
| 22. Probabilitate.....                                   | 29 |
| 23. Variabile aleatoare .....                            | 31 |
| 24. Numere complexe sub formă algebrică.....             | 31 |

|   |    |
|---|----|
| 25. Aplicații în geometria plană.....   | 33 |
| 26. Forma trigonometrică a unui număr complex,<br>operații, ecuații, aplicații.....           | 33 |
| 27. Permutări .....   | 34 |
| 28. Determinanți .....  | 35 |
| 29. Inversa unei matrice.....   | 35 |
| 30. Rangul unei matrice .....   | 36 |
| 31. Sisteme liniare .....   | 36 |
| 32. Legi de compoziție.....   | 38 |
| 33. Structuri algebrice.....  | 39 |
| 34. Inele de polinoame.....   | 41 |
| 35. Polinoame cu coeficienți complecși.....   | 43 |
| <b>TRIGONOMETRIE</b> .....  | 45 |
| 1. Elemente de trigonometrie.....   | 45 |
| 2. Formule trigonometrice .....   | 46 |
| 3. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi<br>vectori în geometria plană..... | 48 |
| <b>ANALIZĂ MATEMATICĂ</b> .....   | 51 |
| <b>I. ȘIRURI</b> .....  | 51 |
| 1. Șiruri monotone.....   | 51 |
| 2. Șiruri mărginite.....  | 51 |
| 3. Limita unui șir .....  | 51 |
| 4. Șiruri convergente .....   | 52 |
| 5. Convergență și mărginire.....  | 53 |

|   |    |
|---|----|
| 6. Criterii de convergență/divergență a șirurilor ..... | 53 |
| 7. Operații cu șiruri convergente .....                 | 54 |
| 8. Cazuri de trecere la limită rezolvate .....          | 55 |
| 9. Cazuri de nedeterminare (exceptate) .....            | 57 |
| 10. Limite remarcabile de șiruri.....                   | 57 |
| II. LIMITE DE FUNCȚII .....                             | 58 |
| 1. Limita unei funcții într-un punct.....               | 58 |
| 2. Limite laterale.....                                 | 58 |
| 3. Limite remarcabile.....                              | 59 |
| III. FUNCȚII CONTINUE .....                             | 61 |
| 1. Noțiuni generale .....                               | 61 |
| 2. Clase de funcții continue .....                      | 61 |
| 3. Proprietățile funcțiilor continue .....              | 61 |
| IV. FUNCȚII DERIVABILE.....                             | 63 |
| 1. Noțiuni generale .....                               | 63 |
| 2. Clase de funcții derivabile .....                    | 63 |
| 3. Reguli de derivare.....                              | 64 |
| 4. Derivata unei funcții compuse .....                  | 64 |
| 5. Derivata unei funcții inverse.....                   | 64 |
| 6. Derivatele funcțiilor elementare și compuse.....     | 65 |
| 7. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....      | 67 |
| Teorema lui Fermat .....                                | 67 |
| Teorema lui Rolle.....                                  | 67 |
| Teorema lui Cauchy .....                                | 67 |
| Teorema lui Lagrange .....                              | 68 |
| Teorema lui Darboux .....                               | 69 |

|  |    |
|--|----|
| Regula lui l'Hospital .....                              | 69 |
| 8. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune..... | 70 |
| 9. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere.....        | 71 |
| 10. Asimptote .....                                      | 71 |
| Asimptote orizontale .....                               | 71 |
| Asimptote verticale .....                                | 71 |
| Asimptote oblice .....                                   | 72 |
| V. PRIMITIVE .....                                       | 73 |
| 1. Noțiuni generale .....                                | 73 |
| 2. Integrala nedefinită .....                            | 73 |
| 3. Clase de funcții care admit primitive .....           | 74 |
| 4. Integrare. Metode de integrare .....                  | 74 |
| Metoda de integrare prin părți .....                     | 74 |
| Metoda schimbării de variabilă .....                     | 75 |
| 5. Primitive uzuale.....                                 | 75 |
| Primitivele funcțiilor elementare .....                  | 75 |
| VI. INTEGRALE DEFINITE .....                             | 78 |
| 1. Diviziuni.....  | 78 |
| 2. Sume Darboux, sume Riemann .....                      | 79 |
| 3. Integrala definită.....                               | 80 |
| Funcții integrabile în sens Riemann .....                | 80 |
| 4. Clase de funcții integrabile .....                    | 80 |
| 5. Proprietăți ale integralelor definite .....           | 81 |
| Proprietatea de liniaritate .....                        | 81 |
| Proprietatea de monotonie.....                           | 81 |
| Proprietăți ale integralei ca funcție de interval .....  | 82 |

|  |           |
|--|-----------|
| 6. Formula Leibniz-Newton .....                              | 82        |
| 7. Formula de medie .....                                    | 82        |
| 8. Formula de integrare prin părți .....                     | 82        |
| 9. Formula schimbare de variabilă.....                       | 83        |
| 10. Aplicații ale integralelor definite .....                | 83        |
| <b>GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU</b> .....       | <b>85</b> |
| <b>I. VECTORI LEGAȚI</b> .....                               | <b>85</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                    | 85        |
| Direcție.....  | 85        |
| Sens.....  | 85        |
| Lungime .....  | 85        |
| 2. Vectori legați echipolenți.....                           | 86        |
| 3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat.... | 86        |
| <b>II. VECTORI LIBERI</b> .....                              | <b>87</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                    | 87        |
| 2. Operații cu vectori liberi.....                           | 87        |
| Adunarea vectorilor liberi .....                             | 87        |
| Scăderea vectorilor liberi .....                             | 88        |
| Înmulțirea unui vector liber cu un număr real .....          | 88        |
| 3. Vectorul de poziție .....                                 | 89        |
| 4. Vectori paraleli .....                                    | 90        |
| 5. Lungimea unui vector liber în plan.....                   | 90        |
| 6. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan.....         | 91        |
| 7. Lungimea unui vector liber în spațiu .....                | 92        |
| 8. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu .....      | 92        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU .....</b> | <b>93</b> |
| REPER CARTEZIAN ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU.....             | 93        |
| 1. Reperul cartezian.....                             | 93        |
| 2. Distanța dintre două puncte în plan .....          | 95        |



## ALGEBRĂ



### FORMULE DE CALCUL PRECURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$  sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \left( (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \left( (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac) \right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$



### SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$



## MODULUL

**Definiție:** Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice}$$

expresie  $E(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proprietăți:**

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ ;
- $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$ ;
- $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$ ;
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ ;  $\exists$  „=”  $\Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$ ;

- $\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$  și  $\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ .



## PARTEA ÎNTREGĂ, PARTEA FRAȚIONARĂ

*Definiții:*

**Partea întregă** a unui număr real  $x$  este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul  $x$  și se notează  $[x]$ .

**Partea fracționară** a lui  $x$  se notează  $\{x\}$  și  $\{x\} = x - [x]$ .

*Proprietăți:*

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ ;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ ;
- $[m+x] = m + [x]$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ;
- $\{m+x\} = \{x\}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ;
- $x-1 < [x] \leq x < [x]+1$ ;
- $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  (Hermite).



## INEGALITĂȚI REMARCABILE

- Dacă  $a \cdot b > 0$ , atunci  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .
- $x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ;
- $3 \cdot (xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$ .

### Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$ , unde

$$m_h = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (\text{media armonică}),$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media geometrică}),$$

$$m_a = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \quad (\text{media aritmetică}),$$

$$m_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \quad (\text{media pătratică}).$$

### Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

### Inegalitatea lui Minkowski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

### Inegalitatea lui Cebîșev

Dacă  $(a_k)_{k \geq 1}$ ,  $(b_k)_{k \geq 1}$  sunt două șiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  sunt două șiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \geq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k).$$

### Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+\alpha)^r \geq 1+r\alpha, \quad \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \alpha \geq -1, r \geq 0$$



## ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULȚIMI

- Se numește propoziție, în sensul logicii matematice, un enunț care, într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

### Valoare de adevăr, tabele de adevăr

| <b>p</b> | <b>q</b> | <b>¬ p</b> | <b>p ∨ q</b> | <b>p ∧ q</b> | <b>p → q</b> | <b>p ↔ q</b> |
|----------|----------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1        | 1        | 0          | 1            | 1            | 1            | 1            |
| 1        | 0        | 0          | 1            | 0            | 0            | 0            |
| 0        | 1        | 1          | 1            | 0            | 1            | 0            |
| 0        | 0        | 1          | 0            | 0            | 1            | 1            |

- Se numește predicat un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care devine propoziție oricum am înlocui variabilele cu valori alese dintr-o mulțime.