

Dan ZAHARIA  
Maria ZAHARIA

**matematică**  
**algebră**  
**geometrie**

**clasa a VI-a**

**partea I**

ediția a XIII-a, revizuită



**mate 2000 – consolidare**

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3530/04.04.2018.*

*Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.*

**Referință științifică:** Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Andreea Roșca  
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**ZAHARIA, MARIA**

**Matematică : algebră, geometrie : clasa a VI-a /** Maria Zaharia,

Dan Zaharia. – Ed. a 13-a, reviz. – Pitești : Paralela 45, 2024 –  
vol.

ISBN 978-973-47-4090-1

**Partea 1.** – 2024. – ISBN 978-973-47-4091-8

I. Zaharia, Dan

51

**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)

sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2024

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

**Stimate cadre didactice/dragi elevi,**

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

**Mate 2000+** este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebită plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

**Rolul aplicației MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.**

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!  
Echipa Editurii Paralela 45

### Abrevieri:

- \* **Inițiere (înțelegere)**
- \*\* **Consolidare (aplicare și exersare)**
- \*\*\* **Excelență (aprofundare și performanță)**
- \*\*\*\* **Supermate**

#### Legendă

**PE** = portofoliul elevului

**PP** = portofoliul profesorului

**PE-PP** = portofoliul elevului - portofoliul profesorului

# Recapitulare și evaluare inițială

## PP Competențe generale (conform programei clasei a V-a)

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

## PE 1. Exerciții și probleme recapitulative

1. Calculați:
  - a)  $(3^{102} : 3^{72} + 2^2 \cdot 2^{25} - 2025^0) : (27^{10} + 8^9 - 18^2 : 324)$ ;
  - b)  $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^3 \cdot 2^{42} - 2^{46} + [3^{150} : 3^{45} - (3^7)^{15}] + 16\}$ ;
  - c)  $1^{2025} - 2025^0 + 3^2 - 2^3 + 2026^1 - 2025^1 + 0^{2030}$ ;
  - d)  $[(2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) : (2^0 + 2^2 + 2^4 + 3^2)] \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3)$ .
2. Verificați dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte, știind că  $n$  este număr natural:
  - a)  $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ ;
  - b)  $y = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$ ;
  - c)  $z = 100 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99)$ ;
  - d)  $t = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024)$ .
3. Calculați ultima cifră a numărului:
  - a)  $x = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 5^{2026}$ ;
  - b)  $y = 2^{2027} + 3^{2028} + 5^{2029} + 6^{2030}$ ;
  - c)  $z = 2025^{2033} + 2026^{2033} + 2027^{2033} + 2028^{2033}$ ;
  - d)  $t = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2030}$ .
4. a) Transformați fracțiile ordinare  $\frac{17}{4}$ ,  $\frac{11}{3}$ ,  $\frac{43}{15}$  și  $\frac{71}{330}$  în fracții zecimale.  
b) Transformați fracțiile zecimale 1,9(3), 3,08(3), 5,28 și 0,1(23) în fracții ordinare ireductibile.
5. a) Aflați numerele care împărțite la 5 dau câtul cu o unitate mai mare decât restul.  
b) Calculați câtul și restul împărțirii numărului de forma  $\overline{abab}$  la  $\overline{ab}$ .  
c) Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 12 să dea restul 4 și împărțite la 18 să dea restul 8.  
d) Calculați restul împărțirii numărului  $70a + 37$  la 7, la 10 și la 14.
6. a) Efectuați calculele:
  - a)  $1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} : 2$ ;
  - b)  $5,4 - 1\frac{8}{25} \cdot 3, (3)$ ;
  - c)  $(0,5)^2 + 0, (6) - 0,1(6)$ ;
  - d)  $1,41 \cdot 10^2 : 0,3$ ;
  - e)  $1,1^2 + 0,9^2 : 0,3^3$ ;
  - f)  $1,21 \cdot (2,3 - 1,2) : 1,1^3$ .
7. a) Transformați din baza 10 în baza 2 numerele: 29, 31, 47 și 135.

b) Transformați din baza 2 în baza 10 numerele:  $1101_{(2)}$ ,  $10111_{(2)}$ ,  $1011101_{(2)}$  și  $11100101_{(2)}$ .

**8.** Determinați cifrele  $x$  și  $y$ , știind că  $\overline{2,xy} + \overline{7,yx} = 9,99$ .

**9.** Diferența a două numere naturale este 48. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic, se obțin câtul 3 și restul 2. Aflați numerele.

**10.** Suma a două numere este 18,4, iar diferența lor este 1,6. Calculați numerele.

**11.** Într-un bloc sunt apartamente cu 2 camere și apartamente cu 3 camere, în total 20 de apartamente și 45 de camere. Calculați câte apartamente sunt cu 2 camere și câte apartamente sunt cu 3 camere.

**12.** Ionuț s-a gândit la un număr, din care a scăzut 50. Rezultatul obținut l-a împărțit la 50. A mărit numărul obținut cu 1 și noul rezultat l-a mărit de 10 ori, obținând numărul 100. La ce număr s-a gândit Ionuț?

**13.** Patru robinete, care au același debit, curg împreună și umplu cu apă un rezervor în 6 ore. Aflați în câte ore pot umple același rezervor 3 robinete cu același debit.

**14.** Pentru două stilouri și trei pixuri, Ileana a plătit 97,50 de lei. Pentru un stilou și șase pixuri de același fel cu cele cumpărate de Ileana, Tudor a plătit 82,50 de lei. Calculați cât costă un stilou și cât costă un pix.

**15.** Din cei 28 de elevi ai unei clase, 18 participă la o activitate de ecologizare a spațiului verde, iar 22 participă la o activitate de confecționare a mărțișoarelor din materiale reciclabile. Știind că fiecare elev participă la cel puțin una dintre cele două activități, calculați câți elevi participă:

- a) la ambele activități;
- b) numai la ecologizare;
- c) numai la confecționarea mărțișoarelor.

**16.** Un dreptunghi are aria egală cu  $27 \text{ m}^2$  și lățimea egală cu  $0,3$  din lungimea sa. Aflați perimetrul dreptunghiului.

**17.** Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt exprimate prin numere naturale pare consecutive. Știind că suma tuturor muchiilor paralelipipedului dreptunghic este egală cu 96 cm, calculați volumul paralelipipedului dreptunghic.

**18.** Aproximați numărul 143073 prin adaos și apoi prin lipsă la:

- a) zeci;
- b) sute;
- c) zeci de mii.

**19.** Rotunjiți numărul 814526 la:

- a) sute;
- b) mii;
- c) zeci de mii.

**20.** Calculați:

- a)  $24^\circ 17' + 17^\circ 24'$ ;
- b)  $65^\circ 14' - 15^\circ 7'$ ;
- c)  $21^\circ 11' \cdot 5$ ;
- d)  $60^\circ 45' : 5$ ;
- e)  $43^\circ 24' + 17^\circ 53'$ ;
- f)  $74^\circ 10' - 24^\circ 25'$ ;
- g)  $11^\circ 17' \cdot 7$ ;
- h)  $53^\circ 12' : 4$ ;
- i)  $84^\circ 36' : 6 + 6^\circ 7' \cdot 9$ .

**21.** a) Suma a două numere prime este 30. Determinați cele două numere.

b) Diferența a două numere prime este 20. Determinați cele două numere, știind că sunt mai mici decât 50.

c) Determinați numerele prime  $a$  și  $b$ , știind că  $5a + 3b = 19$ .

**22.** Aflați câte numere de forma:

- a)  $\overline{x1yz}$  sunt divizibile cu 2;
- b)  $\overline{ab2c}$  sunt divizibile cu 5.

**23.** a) Scrieți cu cifre romane numerele: 2024, 1917, 2137.

b) Scrieți cu cifre arabe numerele: CXXIV, MCCXLIX, MDCCL.

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

### TESTUL 1

#### I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

- (0,5p) 1. Numărul cu  $(2^2)^3$  mai mic decât 179 este .....
- (0,5p) 2. Suma numerelor naturale care împărțite la 3 dau câtul 6 este egală cu .....
- (0,5p) 3. Camelia a cumpărat 3 stilouri și 5 creioane, pentru care a plătit 70 de lei. Ionuț a cumpărat 5 stilouri și 3 creioane de același fel, pentru care a plătit 106 lei. Un stilou a costat .....
- (0,5p) 4. Lățimea unui dreptunghi reprezintă 75% din lungimea dreptunghiului. Dacă lungimea dreptunghiului este de 20 m, atunci perimetrul dreptunghiului este de .....

#### II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (2 puncte)

- (0,5p) 1. Rezultatul calculului  $2^3 - 5^0 + 187 : 17$  este egal cu:  
A. 14; B. 18; C. 19; D. 20.
- (0,5p) 2. Media aritmetică a numerelor 3,75 și 4,25 este egală cu:  
A. 3,90; B. 4; C. 4,05; D. 4,10.
- (0,5p) 3. Frația  $\frac{32}{2^n}$  este echiunitară pentru  $n$  egal cu:  
A. 16; B. 8; C. 5; D. 7.
- (0,5p) 4. Dintre fracțiile zecimale 2,2(3), 2,(23), 2,22 și 2,23 cea mai mare este fracția:  
A. 2,(23); B. 2,23; C. 2,2(3); D. 2,22.

#### III. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Desenați șase puncte distincte două câte două.

- |  | A | B      |
|--|---|--------|
| (0,5p) 1. Cel mai mare număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ...  |   | a) 6;  |
| (0,5p) 2. Cel mai mic număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ...   |   | b) 10; |
| (0,5p) 3. Dacă exact cinci dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se obțin unind punctele date două câte două este egal cu ...      |   | c) 8;  |
| (0,5p) 4. Dacă exact patru dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... |   | d) 1;  |
|  |   | e) 15. |

#### IV. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

- (1p) 1. Împărțind numărul natural nenul  $a$  la numărul natural nenul  $b$ , se obțin câtul 2 și restul 7. Arătați că numărul  $4a - 8b - 1$  este cubul unui număr natural.
- (1p) 2. Calculați  $2,3 + \{5 + 0,1 \cdot [100 \cdot 0,01 + 5,2 \cdot (17 - 1,2 : 0,1)]\}$ .
- (1p) 3. Scrieți toate numerele de forma  $\overline{7xy}$  divizibile cu 5, știind că  $x = y + 1$ .

# Algebră

## Capitolul

### Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

**PP** Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

#### 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în  $\mathbb{N}$

- Recunoașterea unor mulțimi finite sau infinite (mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale pare/impare, mulțimea cifrelor unui număr, mulțimea divizorilor/multiplilor unui număr natural)
- Definirea unor mulțimi folosind diagrame și/sau enumerare de elemente
- Recunoașterea unor numere prime
- Identificarea, dintr-o mulțime de numere, a unui număr compus
- Identificarea unui divizor al unui număr dat
- Scrierea unui număr natural de două cifre ca produs de puteri de numere prime, prin observare directă
- Scrierea mulțimii divizorilor unui număr natural folosind descompunerea în produs de numere prime
- Recunoașterea unor perechi de numere prime între ele

#### 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5,  $10^n$ , 3 și 9 în  $\mathbb{N}$

- Recunoașterea și exemplificarea de elemente care aparțin/nu aparțin unei mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor
- Recunoașterea și exemplificarea de mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor; mulțimi care sunt sau nu în relație de incluziune
- Identificarea unor numere naturale care se divid cu 2, 5,  $10^n$ , 3 sau 9, utilizând criteriile de divizibilitate
- Scrierea unui număr natural ca produs de puteri de numere prime folosind descompunerea în factori primi
- Selectarea dintr-o enumerare dată a numerelor naturale prime/compușe

#### 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.

- Reprezentarea unor mulțimi prin diagrame și/sau prin enumerarea elementelor
- Efectuarea de operații cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) punând accentul pe exemple practice

PE-PP

## 1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări.

### Relația dintre un element și o mulțime.

#### Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice



• **Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**. Mulțimile se notează, de regulă, cu litere mari:  $A, B, C, \dots$ , iar elementele mulțimilor se notează cu litere mici, cu numere, cu anumite simboluri.

• Mulțimile pot fi definite în trei moduri:

**1. Enumerând toate elementele mulțimii între acolade**

**Exemplu:**  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

**2. Enumerând toate elementele mulțimii în interiorul unei linii curbe închise, numită diagramă Venn-Euler**

**Exemplu:**  $A = \begin{array}{ccc} \bullet 1 & \bullet 3 & \bullet 7 \\ & \bullet 5 & \bullet 9 \end{array}$

**3. Enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii** (proprietate pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu se află în mulțime)

**Exemplu:**  $A = \{x \mid x \text{ este o cifră impară}\}$ .

Citim: *mulțimea A este mulțimea tuturor elementelor x, cu proprietatea că x este cifră impară.*

• Dacă  $A$  este o mulțime și  $x$  un element al său, atunci vom scrie  $x \in A$  și vom citi  $x$  aparține mulțimii  $A$ . Dacă  $x$  nu este element al mulțimii  $A$ , atunci vom scrie  $x \notin A$  și vom citi  $x$  nu aparține mulțimii  $A$ .

**Exemplu:** Dacă  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , atunci  $1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A$  și  $0 \notin A, 2 \notin A, 6 \notin A, 11 \notin A$ .

**Observație:** Într-o mulțime fiecare element este scris o singură dată.

**Exemplu:** Mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *matematica* este:

$$M = \{m, a, t, e, i, c\}.$$

• Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu simbolul  $\emptyset$ .

**Exemplu:** Mulțimea consoanelor din cuvântul *eu*.

• Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită **mulțimea numerelor naturale** și se notează cu  $\mathbb{N}$ . Scriem:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

• Mulțimea numerelor naturale diferite de zero se numește **mulțimea numerelor naturale nenule** și se notează cu  $\mathbb{N}^*$ . Scriem:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

• Dacă toate elementele unei mulțimi sunt numere, atunci mulțimea se numește **mulțime numerică**.

**Exemplu:**  $C = \{2, 7, 11\}$ . Mulțimea  $C$  are ca elemente doar numere,  $2 \in C, 7 \in C, 11 \in C$ , și astfel mulțimea  $C$  este o mulțime numerică.



• Dacă o mulțime conține cel puțin un element care nu este număr, atunci mulțimea se numește **mulțime nenumerică**.

**Exemplu:**  $D = \{m, a, t, e\}$ . Mulțimea  $D$  conține literele din care este alcătuit cuvântul *mate*. Mulțimea  $D$  este o mulțime nenumerică.

• O mulțime care are  $n$  elemente, unde  $n$  este un număr natural, se numește **mulțime finită**. Numărul de elemente ale unei mulțimi  $M$  se numește **cardinalul mulțimii  $M$**  și se notează **card  $M$** .

**Exemple:**

- Mulțimea vidă ( $\emptyset$ ) este o mulțime finită și notăm  $\text{card } \emptyset = 0$ .
- Mulțimea  $E = \{0, 4, 7, 15\}$  este o mulțime finită și notăm  $\text{card } E = 4$ .

• O mulțime care nu are un număr finit de elemente se numește **mulțime infinită**.

**Exemple:**

- Mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor naturale nenule sunt mulțimi infinite.
- Dreapta, semidreapta, segmentul, considerate ca mulțimi de puncte, sunt mulțimi infinite.

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

### PE Înțelegere \*

1. Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:  
a) *biblioteca*;                      b) *cinematecă*;                      c) *actualități*.
2. Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:  
a) 43257;                      b) 524123;                      c) 17230415;                      d) 425730.
3. Scrieți mulțimea numerelor naturale:  
a) mai mici sau egale cu 4;                      b) cuprinse între 6 și 14.
4. Scrieți mulțimea cifrelor: a) pare;                      b) impare.
5. Fie mulțimile:  $A = \{1, 3, 4, 7\}$  și  $B = \{2, 4, 7, 9\}$ . Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
a)  $2 \in A$ ;                      b)  $3 \notin A$ ;                      c)  $2 \notin B$ ;  
d)  $1^{2005} \in A$ ;                      e)  $4 \in A$  și  $4 \in B$ ;                      f)  $1 \in A$  sau  $7 \in B$ .
6. Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor:  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$ .
7. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:  
a)  $3 \in \{0, 1, 3\}$ ;                      b)  $2 \notin \{1, 4, 5\}$ ;  
c)  $4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ ;                      d)  $0 \in \emptyset$ ;  
e)  $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3^{14}\}$ ;                      f)  $10 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}$ .
8. Indicați propozițiile false:  
a)  $2 \in \{1, 7, 3\}$ ;                      b)  $7^0 \in \{1, 3, 9\}$ ;                      c)  $4 \notin \{1, 2, 3\}$ ;  
d)  $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$ ;                      e)  $0 \in \emptyset$ ;                      f)  $0 \notin \emptyset$ .
9. Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele acestora:  
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ ;                       $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$ ;  
 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$ ;                       $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$ .

**PE Aplicare și exersare \*\***

**10.** Fie  $A = \{0, 1, 3\}$  și  $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$ . Scrieți elementele mulțimii  $B$  și precizați cardinalul mulțimii  $B$ .

**11.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}$ ;      b)  $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\}$ ;

c)  $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}$ .

**12.** Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$ ;       $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\}$ ;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x \leq 32\}$ ;       $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x^3 \leq 64\}$ .

**13.** Aflați cardinalul mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2025\}$ ;       $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1957\}$ ;       $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 10\}$ ;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$ ;       $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 14\}$ ;       $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 2026\}$ .

**14.** Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}$ ;       $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\}$ ;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12 \text{ și } x^2 \geq 9\}$ ;       $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}$ .

**15.** Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 < 7\}$ ;       $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ și } x \leq 3^3 - 2\}$ ;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}$ ;       $D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\}$ ;

$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect și } x \text{ are ultima cifră } 3\}$ ;       $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2^{x+1} = 32\}$ .

**PE Aprofundare și performanță \*\*\***

**16.** Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$ ;       $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$ .

**17.** Scrieți elementele mulțimilor de mai jos. Ce observați?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}$ ;       $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}$ ;       $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}$ .

**18.** Determinați mulțimile:  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$ ;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{lab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$ ;       $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}$ .

**PE-PP Supermate \*\*\*\***

**19.** Determinați mulțimile  $A$  și  $B$  care îndeplinesc simultan proprietățile:

a)  $\{1, 2, 3, 4\}$  reprezintă mulțimea formată din toate elementele mulțimilor  $A$  și  $B$ ;

b) fiecare mulțime are câte două elemente;

c) dacă  $x \in A$ , atunci  $x + 1 \in B$ .

**20.** Se dă mulțimea  $A$  formată din numere naturale, cu proprietățile:

a)  $9 \in A$ ;      b) dacă  $x \in A$ , atunci  $5x + 1 \in A$ ;      c) dacă  $7x + 4 \in A$ , atunci  $x \in A$ .

Arătați că  $6 \in A$ .

# Capitolul

## Rapoarte și proporții

**PP** Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

- 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
  - 1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
    - Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de rapoarte, procente
    - Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de proporții și mărimi direct sau invers proporționale, din practică/cotidian sau în context intradisciplinar sau interdisciplinar (de exemplu: scara unei hărți, concentrația unei soluții)
    - Identificarea unor mărimi direct proporționale în reprezentări grafice
- 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
  - 2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
    - Determinarea unui procent dintr-un număr dat; determinarea unui număr, când se cunoaște un procent din el (de exemplu: reducerea/creșterea prețului unui produs, concentrația unei soluții)
    - Calcularea unei valori necunoscute dintr-o proporție
    - Calcularea unor numere folosind un șir de rapoarte egale
    - Calcularea valorii unui raport folosind un șir de rapoarte egale
    - Organizarea și reprezentarea de date sub formă de grafice, tabele sau diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora
- 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
  - 3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
    - Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție
    - Rezolvarea de probleme în care intervin rapoarte, procente sau proporții
    - Stabilirea proporționalității (directe sau inverse) între două mărimi și rezolvarea de probleme în care intervin mărimi direct sau invers proporționale, în contexte practic-aplicative sau interdisciplinare
    - Utilizarea unor reguli specifice pentru obținerea de proporții derivate (numai pe exemple numerice)
    - Calcularea probabilității în contexte practic aplicative simple
- 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
  - 4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

- Exprimarea relației de proporționalitate directă sau inversă între mărimi sub forma unei proporții sau a unei egalități de produse
- Exprimarea în limbaj matematic a datelor unei probleme care se rezolvă cu regula de trei simplă
- Determinarea valorilor minime, maxime și medii dintr-un set de date
- Organizarea informațiilor pe baza unor criterii, utilizând sortarea, clasificarea și reprezentarea grafică (cu accent pe interpretarea aceluiași set de date în contexte diferite și pe utilizarea softurilor matematice)

## 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

### 5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date

- Justificarea proporționalității în vederea aplicării regulii de trei simplă
- Interpretarea datelor înregistrate în tabele, grafice sau diagrame; estimări
- Analizarea unui set de date pentru a determina existența unei proporționalități (de exemplu: economie, cotidian)
- Interpretarea mediei unui set de date
- Exprimarea semnificației unor elemente dintr-un grafic

## 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

### 6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

- Modelarea matematică a dependențelor direct sau invers proporționale
- Interpretarea unui set de date descrise grafic sau numeric (de exemplu: dacă viteza este constantă, atunci distanța și timpul sunt în relație de proporționalitate directă; dacă distanța este constantă, atunci viteza și timpul sunt în relație de proporționalitate inversă)
- Interpretarea unui raport ca raport procentual sau ca probabilitate



### 2.1. Procent

Se numește **raport procentual** un raport de forma  $\frac{P}{100}$  ( $P \in \mathbb{Q}, P \geq 0$ ).

**Observație:** Raportul procentual  $\frac{P}{100}$  se notează  $P\%$  și se citește „ $P$  la sută” sau „ $P$  procente”.

### 2.2. Aflarea a $P\%$ dintr-un număr

Pentru a calcula  $P\%$  dintr-un număr  $a$ , se înmulțește numărul  $a$  cu  $\frac{P}{100}$ , adică se efectuează produsul  $\frac{P}{100} \cdot a$ .

**Exemplu:**  $15\%$  din  $120$  este  $\frac{15}{100} \cdot 120 = 18$ .

### 2.3. Aflarea unui număr când cunoaștem $P\%$ din el

Dacă  $P\%$  dintr-un număr necunoscut  $x$  este  $b$ , adică  $\frac{P}{100} \cdot x = b$ , atunci  $x = b : \frac{P}{100} = \frac{b \cdot 100}{P} = \frac{b \cdot 100}{P} = \frac{100 \cdot b}{P}$ .

**Exemplu:** Dacă  $20\%$  dintr-un număr este  $45$ , calculați numărul.

Se va scrie:  $\frac{20}{100} \cdot x = 45$  și  $x = 45 : \frac{20}{100} = 45 \cdot \frac{100}{20} = 225$ , adică numărul este  $225$ .

### 2.4. Calculul raportului procentual

Raportul  $\frac{a}{b}$  trebuie scris sub forma  $\frac{P}{100}$ .

**Exemple:**

1. Scrieți raportul  $\frac{7}{25}$  sub forma unui raport procentual.

Se scrie  $\frac{7}{25} = \frac{P}{100}$  și se calculează  $P = \frac{7 \cdot 100}{25} = 28$ , adică  $\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$  sau  $\frac{7}{25}$  scris sub forma unui raport procentual este  $28\%$ .

**Observație:** Raportul  $\frac{7}{25}$  se putea scrie sub forma unui raport procentual și prin amplificare cu  $4$ , adică  $\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$ , ceea ce înseamnă că  $\frac{7}{25}$ , scris sub formă de raport procentual, este  $\frac{28}{100}$  sau  $28\%$ .

2. Calculați cât la sută din  $125$  este  $75$ .

Se scrie  $\frac{P}{100}$  din  $125$  este  $75$ , adică  $\frac{P}{100} \cdot 125 = 75$  și se obține  $P = 75 : \frac{125}{100} = \frac{75 \cdot 100}{125} = 60$ . Deci,  $60\%$  din  $125$  este  $75$ .

## 2.5. Creșteri și scăderi cu $p\%$

Dacă un număr crește cu  $p\%$ , noul număr este  $(100 + p)\%$ .

Dacă un număr scade cu  $p\%$ , noul număr este  $(100 - p)\%$ .

**Exemplu:** Prețul unui obiect este de 300 de lei.

a) Calculați noul preț dacă obiectul se scumpește cu 20%.

b) Calculați noul preț dacă obiectul se ieftinește cu 20%.

**Rezolvare:** a) Noul preț al obiectului este 120% din prețul inițial, adică  $\frac{120}{100} \cdot 300 = 360$  de lei.

b) Noul preț al obiectului este 80% din prețul inițial, adică  $\frac{80}{100} \cdot 300 = 240$  de lei.

## 2.6. Procente din procente

**Exemplu:** Prețul unui obiect este de 800 de lei. Obiectul se scumpește cu 20% și apoi se ieftinește cu 20%.

a) Calculați noul preț al obiectului.

b) Cu ce procent s-a modificat prețul final față de cel inițial?

**Rezolvare:** a) Dacă prețul crește cu 20%, înseamnă că acesta va fi de 120% din prețul inițial, adică  $\frac{120}{100} \cdot 800 = 960$  de lei. Prețul scade cu 20%, ceea ce înseamnă că acesta este

80% din noul preț, adică  $\frac{80}{100} \cdot 960 = 768$  de lei.

b) Prețul final este 80% din 120% din prețul inițial, adică  $\frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100} = \frac{96}{100}$  din prețul inițial. Deci prețul final reprezintă 96% din prețul inițial.

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

### PE Înțelegere \*

1. Exprimați sub formă de fracții ordinare următoarele procente:

- a) 10%;      b) 30%;      c) 45%;      d) 75%;      e) 90%.

2. Calculați:

- a) 5% din 140;      b) 15% din 1200;      c) 60% din 3500.

3. Alexandru afirmă că numărul fetelor din clasa lui reprezintă 75 de procente din numărul elevilor clasei. Cum interpretați afirmația lui Alexandru?

4. Aflați:

- a) 15% din 60;      b) 0,25% din 40;      c)  $\frac{50}{13}\%$  din 390;

- d) 35% din 7000;      e)  $2\frac{1}{2}\%$  din 44;      f) 2,5% din 100.

5. O societate comercială are 2400 de muncitori. Dintre aceștia 40% sunt femei. Câte femei sunt în acea societate comercială?

6. Aflați un număr  $x$ , știind că:

- a) 15% din el este 225;      b) 40% din el este 640;      c) 75% din el este 1872.

- 7.** Aflați un număr, știind că:  
 a) 18% din el este 90;   b) 23% din el este 4600.  
**8.** După ce se scade 16% dintr-un număr, se obține 434. Aflați numărul.  
**9.** După ce un călător a străbătut 38 km, el a observat că a mers 19% din întreg drumul. Câți kilometri are tot drumul?  
**10.** Într-un aliaj se află 3 kg cositor. Știind că masa cositorului este 24% din masa aliajului, aflați masa aliajului.

**PE Aplicare și exersare \*\***

- 11.** După ce a fost premiat cu 12% din salariul lunar, un muncitor a primit la sfârșitul lunii 4200 u.m. (unități monetare). Aflați salariul lunar al muncitorului.  
**12.** Completați:  
 a) ...% din 21,4 este 3,21;   b) ...% din 200 este 300;  
 c) ...% din 100 este 150;    d) ...% din 100 este 100.  
**13.** Din 3000 de muncitori ai unei fabrici, 2400 sunt femei. Care este procentul femeilor?  
**14.** Dintr-o suprafață de 240 ha au fost arate 24 ha. Cât la sută din suprafața respectivă reprezintă suprafața arată?  
**15.** Cât la sută reprezintă:  
 a) 15 din 450;   b) 220 din 60;    c) 14 din 420;  
 d) 0,(5) din 0,(3);   e) 1,(2) din 0,(4);   f) 1,(1) din 6,(6)?  
**16.** Un kilogram de banane fără T.V.A. costă 5 lei, iar cu T.V.A. costă 5,85 de lei. Cât la sută reprezintă T.V.A.-ul?  
**17.** Într-o știre difuzată la radio se anunță că 20% din producția de grâu a acestui an va fi destinată exportului. Cum interpretați această știre? A câta parte din producția de grâu va fi destinată exportului?  
**18.** Completați:  
 a) 15% din 39 este egal cu .....;   b) 40% din 1000 este egal cu .....;  
 c) 2,1% din 400 este egal cu .....;    d) 145% din 90 este egal cu ..... .  
**19.** Pe eticheta unui produs scrie 500 ml ± 2%. Cum interpretați această informație?  
**20.** 85% din elevii unei școli participă la o manifestare sportivă. Câți elevi are școala, dacă la manifestarea respectivă au participat 1700 de elevi?  
**21.** Venitul lunar net (fără impozit) al unei familii este 6000 u.m. (unități monetare), iar cheltuielile lunare sunt: 20% chiria, 10% transportul, 40% hrana, 13% îmbrăcămintea, 5% energia electrică, 12% diverse cheltuieli. Completați următorul tabel cu sumele aferente și întocmiți o diagramă sub formă de cerc în care să treceți aceste sume.

Cheltuieli în u.m.	Chirie	Transport	Hrană	Îmbrăcăminte	Energie	Diverse

- 22.** Completați următorul tabel:

<b>Prețul fără T.V.A.</b>	50 u.m.	550 u.m.	4500 u.m.	54000 u.m.
<b>T.V.A. 20%</b>				
<b>Prețul cu T.V.A.</b>				

**PE Aprofundare și performanță \*\*\***

- 23.** O bicicletă costă 725 de lei.
- Cât va costa bicicleta după o reducere cu 15%?
  - Cât va costa bicicleta după o scumpire cu 10%?
- 24.** O bancă acordă o dobândă anuală de 7%. Calculați ce sumă trebuie depusă la bancă, astfel încât după un an suma să fie de 61204 lei.
- 25.** După o scumpire cu 20%, un obiect costă 67200 de lei.
- Calculați cât a costat obiectul înainte de scumpire.
  - Cu cât la sută trebuie ieftinit obiectul pentru a ajunge la prețul inițial?
  - Care ar fi fost prețul inițial, dacă în locul scumpirii cu 20% ar fi fost două scumpiri succesive cu 5% și 25%?
- 26.** Numărul  $a$  reprezintă 20% din numărul  $b$ .
- Cât la sută din numărul  $a$  reprezintă numărul  $b$ ?
  - Cât la sută reprezintă  $a$  din  $a + b$ ?
- 27.** Un obiect se scumpește cu 10% și apoi se ieftinește cu 10%, prețul obiectului ajungând la 118800 de lei.
- Care a fost prețul inițial al obiectului?
  - Cât la sută din prețul inițial reprezintă prețul actual al obiectului?
- 28.** Prețul unui obiect, după o scumpire cu 15%, este de 3680 de lei.
- Care a fost prețul inițial al obiectului?
  - Dacă prețul inițial al obiectului a fost de 3200 de lei, calculați ce preț ar avea obiectul după ce s-ar scumpi cu 10% și apoi cu 15% din noul preț.
  - Cât la sută din prețul inițial reprezintă cele două scumpiri la un loc?

**PE-PP Supermate \*\*\*\***

- 29.** Aflați numerele naturale  $a, b, c, d, e$ , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
- $a$  este egal cu 40% din  $b$  și  $c$  este egal cu  $\frac{6}{5}$  din  $b$ ;
  - $d$  este egal cu 25% din  $c$  și  $e$  este egal cu  $\frac{8}{9}$  din  $d$ ;
  - media aritmetică a numerelor  $a, b$  și  $c$  este cu 70 mai mare decât media aritmetică a numerelor  $d$  și  $e$ .
- 30.** Determinați 4 numere naturale, știind că primul reprezintă 75% din suma celorlalte trei, al doilea reprezintă 40% din suma celorlalte trei, al treilea reprezintă  $\frac{2}{19}$  din suma celorlalte trei, al patrulea reprezintă  $\frac{4}{17}$  din suma celorlalte trei, iar diferența dintre suma primului cu al treilea și suma celui de-al doilea cu al patrulea este 5.
- Etapa județeană, Bacău*
- 31.** Considerăm numerele  $a, b, c \in \mathbb{N}$  verificând relațiile:
- $$a = 33,3\% \cdot (b + c) \text{ și } b = 200\% \cdot (c - a).$$
- Arătați că  $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ .
  - Determinați  $a, b, c$ , știind că c.m.m.m.c. al lor este egal cu 300.



## AUTOEVALUARE

Citiți cu atenție afirmațiile de mai jos și acordați un calificativ: **insuficient** (I), **suficient** (S), **bine** (B) sau **foarte bine** (FB) pentru a vă evalua parcursul de învățare din conținuturile studiate.

AFIRMAȚII	FB	B	S	I
1. Știți să stabiliți relații între un element și o mulțime și între două mulțimi.				
2. Știți să efectuați operații cu mulțimi.				
3. Recunoașteți numerele prime și numerele prime între ele și știți să descompuneți numerele în factori primi.				
4. Știți să calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două numere sau a mai multor numere naturale.				
5. Știți să aplicați proprietățile divizibilității în rezolvarea problemelor.				
6. Știți să determinați un termen necunoscut dintr-o proporție.				
7. Știți să interpretați un raport ca raport procentual sau ca probabilitate.				
8. Știți să rezolvați probleme în care intervin rapoarte, procente sau proporții.				
9. Știți să identificați mărimile direct proporționale și mărimile invers proporționale.				
10. Știți să rezolvați probleme în care intervin mărimi direct proporționale sau mărimi invers proporționale, în contexte practico-aplicative sau interdisciplinare.				
11. Știți să reprezentați un set de date prin tabele, grafice sau diagrame.				
12. Știți să interpretați datele înregistrate în tabele, grafice sau diagrame.				

# Geometrie

---

## Capitolul

### Noțiuni geometrice fundamentale

**PP** Competențe generale, competențe specifice. Exemple de activități de învățare

1. **Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
  - 1.5. **Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date**
    - Identificarea unor drepte sau unghiuri într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare
    - Identificarea unor cercuri și arce de cerc într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare
    - Identificarea unor relații între elemente geometrice date (apartenență, incluziune, egalitate, concurență, paralelism, perpendicularitate, simetrie)
2. **Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
  - 2.5. **Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte**
    - Prelucrarea cantitativă a unor informații privind distanțe, lungimi de segmente sau măsuri de unghiuri/arce în vederea stabilirii coliniarității unor puncte, inclusiv în contextul cercului (de exemplu: punctele diametral opuse, centrul cercului)
    - Verificarea faptului că două unghiuri sunt suplementare, complementare sau congruente
    - Aplicarea, într-o configurație dată, a proprietății unghiurilor opuse la vârf și a unghiurilor în jurul unui punct pentru determinarea unor măsuri de unghiuri
3. **Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
  - 3.5. **Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice**
    - Utilizarea instrumentelor geometrice (raportor, riglă, compas) pentru realizarea unor figuri geometrice
    - Construcția bisectoarei unui unghi folosind raportorul și rigla, respectiv compasul și rigla
    - Construcția dreptelor paralele, a dreptelor perpendiculare, a mediatoarei unui segment folosind instrumentele geometrice
    - Construcția simetricei unei figuri față de o dreaptă dată
    - Determinarea unor lungimi de segmente utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice
    - Determinarea unor măsuri de unghiuri/arce de cerc utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
- 4.5. Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc
  - Descrierea în limbaj matematic a unor configurații geometrice date care conțin drepte, unghiuri, cercuri
  - Transpunerea unor informații date (matematic sau în context practic) în configurații geometrice care conțin drepte, unghiuri, cercuri
  - Justificarea paralelismului a două drepte utilizând perechi de unghiuri formate de două drepte cu o secantă
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
- 5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc
  - Stabilirea numărului minim/maxim de drepte determinate de un număr dat de puncte (fără generalizare)
  - Analizarea unei configurații geometrice pentru verificarea unor proprietăți referitoare la bisectoare (de exemplu: bisectoarele unghiurilor opuse la vârf, bisectoarele unghiurilor adiacente suplimentare)
  - Analizarea unei configurații geometrice pentru verificarea unor proprietăți referitoare la lungimi (de exemplu: ordonarea unor puncte pe dreaptă utilizând lungimi de segmente date, lungimea coardei cel mult egală cu lungimea diametrului)
  - Analizarea unei configurații geometrice pentru verificarea unor proprietăți referitoare la simetria față de un punct, simetria față de o dreaptă
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii
- 6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc
  - Descrierea unei situații-problemă, cu transpunerea acesteia din limbaj curent în limbaj simbolic și figurativ
  - Estimarea lungimii unui segment, a unei distanțe, a măsurii unui unghi sau a unui arc utilizând diverse date, reguli, relații
  - Validarea rezultatului unui calcul/corectitudinii unei reprezentări geometrice, folosind modalități diferite de abordare: estimări, măsurători, comparații

**PE-PP 3. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct**



În figura 1, dreptele  $MN$  și  $AB$  sunt concurente în punctul  $O$ . Din faptul că punctele  $A$ ,  $O$  și  $B$  sunt coliniare rezultă că:

$$\sphericalangle AOM + \sphericalangle MOB = 180^\circ \text{ și } \sphericalangle AON + \sphericalangle NOB = 180^\circ.$$

Se observă că:

a)  $\sphericalangle AOM + \sphericalangle MOB + \sphericalangle BON + \sphericalangle AON = 360^\circ$ ;

b)  $\sphericalangle AOM$ ,  $\sphericalangle MOB$ ,  $\sphericalangle BON$ ,  $\sphericalangle AON$  au același vârf  $O$  și că interioarele unghiurilor  $AOM$ ,  $MOB$ ,  $BON$  și  $AON$  nu au puncte comune.

Considerăm trei unghiuri congruente, cu măsura de  $120^\circ$  fiecare, care au vârful comun punctul  $O$  și ale căror interioare nu au puncte comune. Observăm că suma măsurilor celor trei unghiuri este  $360^\circ$ , adică  $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COA = 360^\circ$ .

Spunem despre unghiurile  $AOB$ ,  $BOC$  și  $COA$  că sunt **unghiuri în jurul punctului  $O$** .

Urmăriți cu atenție figurile de mai jos.

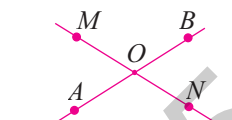


Fig. 1

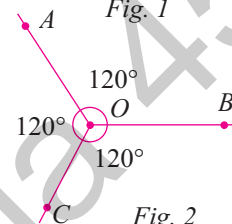


Fig. 2

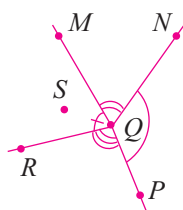


Fig. 3



Fig. 4

În figura 3, unghiurile  $MQN$ ,  $NQP$  și  $PQR$  au același vârf  $Q$ , interioarele lor nu au puncte comune, dar  $\sphericalangle MQN + \sphericalangle NQP + \sphericalangle PQR < 360^\circ$  și punctul  $S$ , de exemplu, nu aparține niciunui dintre unghiurile amintite anterior. **Unghiurile  $MQN$ ,  $NQP$ ,  $PQR$  nu sunt unghiuri în jurul punctului  $Q$ , însă  $\sphericalangle MQN$ ,  $\sphericalangle NQP$ ,  $\sphericalangle PQR$  și  $\sphericalangle RQM$  sunt unghiuri în jurul punctului  $Q$ .**

În figura 4, unghiurile  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  și  $DOB$  au același vârf  $O$ , însă interioarele unghiurilor  $AOB$  și  $DOB$  au puncte interioare comune ( $T \in \text{Int}(\sphericalangle AOB)$  și  $T \in \text{Int}(\sphericalangle DOB)$ ) și  $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOB > 360^\circ$ .

**Unghiurile  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  și  $DOB$  nu sunt unghiuri în jurul punctului  $O$ , însă  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle BOC$ ,  $\sphericalangle COD$  și  $\sphericalangle DOA$  sunt unghiuri în jurul punctului  $O$ .**

**Reținem!**

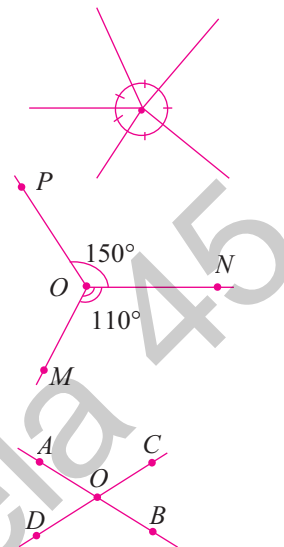
• Trei sau mai multe unghiuri sunt **unghiuri în jurul unui punct  $O$**  dacă au proprietățile:

- a) toate au același vârf (punctul  $O$ );
- b) orice punct al planului care nu aparține niciuneia dintre laturile unghiurilor aparține interiorului unui singur unghi.

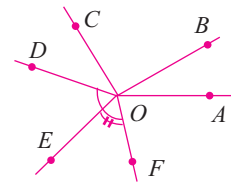
• **Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu  $360^\circ$ .**

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

- Unghiurile marcate din figura alăturată sunt congruente.
  - Care este suma măsurilor lor?
  - Cum se numesc unghiurile marcate?
  - Care este măsura lor?
- În figura alăturată,  $\sphericalangle MON = 110^\circ$ ,  $\sphericalangle NOP = 150^\circ$ . Calculați măsura unghiului  $POM$ .
- Analizați figura alăturată.
  - Scriveți unghiurile formate în jurul punctului  $O$ .
  - Scriveți unghiurile opuse la vârf din figura alăturată.
  - Dacă  $\sphericalangle BOC = 45^\circ$ , calculați măsurile celorlalte unghiuri.
- În jurul unui punct  $O$ , se consideră cinci unghiuri care nu au puncte interioare comune, cu măsurile de:  $2x^\circ - 10^\circ$ ,  $2x^\circ + 30^\circ$ ,  $3x^\circ - 10^\circ$ ,  $x^\circ$  și  $4x^\circ - 10^\circ$ .
  - Calculați măsurile unghiurilor.
  - Realizați un desen care să illustreze datele problemei.
  - În jurul punctului  $O$  există unghiuri obtuze? Numiți-le!
- Calculați măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că diferența măsurilor a două dintre unghiuri este de  $40^\circ$ .
- Se consideră patru drepte concurente într-un punct. Patru din cele opt unghiuri care nu au puncte interioare comune au măsurile de:  $x^\circ$ ,  $x^\circ - 20^\circ$ ,  $x^\circ + 20^\circ$ ,  $3x^\circ$ .
  - Calculați măsurile unghiurilor.
  - Realizați un desen care să illustreze datele problemei.
  - În jurul punctului  $O$  există unghiuri drepte? Numiți-le!
- Se consideră două drepte concurente într-un punct  $O$ . Calculați măsurile unghiurilor formate în jurul punctului  $O$ , dacă suma măsurilor a trei dintre ele este egală cu  $240^\circ$ .
- Calculați ce unghi descrie:
  - minutarul (limba mare) unui ceas în 30 de minute; dar într-un minut?
  - orarul (limba mică) unui ceas într-o oră; dar într-un minut?
- Se consideră cinci unghiuri în jurul unui punct, având măsurile exprimate prin numere naturale consecutive. Calculați măsurile unghiurilor.
- Analizați dacă putem avea 17 unghiuri în jurul unui punct cu măsurile exprimate prin numere naturale consecutive.
  - Aceeași problemă pentru un număr de 14 unghiuri în jurul unui punct.
  - Determinați numărul maxim de unghiuri care pot fi în jurul unui punct și care au măsurile exprimate prin numere naturale consecutive.



**11.** În figura alăturată, se știe că  $\sphericalangle AOB = 31^\circ$ ,  $\sphericalangle COB = 94^\circ$ ,  $\sphericalangle COD = 41^\circ$ ,  $\sphericalangle DOE$  este cu  $16^\circ$  mai mare decât  $\sphericalangle EOF$  și  $\sphericalangle AOF = 80^\circ$ . Fără a folosi raportorul, calculați măsurile unghiurilor  $EOF$  și  $DOF$ .



**12.** Măsura unui unghi format de două drepte concurente este media aritmetică a celorlalte unghiuri. Calculați măsurile unghiurilor.

**13.** Unghiurile  $O_1$ ,  $O_2$  și  $O_3$  sunt unghiuri în jurul punctului  $O$ . Aflați măsurile celor trei unghiuri, știind că:

- a)  $\sphericalangle O_1 = x^\circ$ ,  $\sphericalangle O_2 = 2x^\circ - 40^\circ$  și  $\sphericalangle O_3 = x^\circ + 40^\circ$ ;
- b)  $\sphericalangle O_2 = 4\sphericalangle O_1$  și  $\sphericalangle O_3 = 5\sphericalangle O_1$ .

**14.** Se consideră cinci unghiuri în jurul unui punct cu măsurile exprimate prin numere naturale consecutive de aceeași paritate. Aflați măsurile unghiurilor.

**15.** Se consideră  $n$  unghiuri în jurul unui punct, unde  $n \in \mathbb{N}$  și  $n \geq 3$ , având măsurile exprimate prin numere naturale nenule. Dacă, începând cu al doilea unghi, fiecare măsură a unghiului următor este cu  $20^\circ$  mai mare decât a unghiului precedent, determinați pe  $n$  și măsurile unghiurilor. Analizați toate cazurile posibile.

**16.** Avem la dispoziție un șablon pentru construcția unui unghi cu măsura de  $19^\circ$ .

- a) Determinați un procedeu pentru construcția unui unghi cu măsura de  $9^\circ$ .
- b) Arătați că, folosind șablonul pentru construcția unui unghi cu măsura de  $19^\circ$ , putem construi unghiuri cu măsura exprimată în grade prin orice număr natural.

**17.** Unghiul  $AOB$  este unghi alungit. Se consideră punctele  $C$  și  $D$  situate de o parte și de alta a dreptei  $AB$ , astfel încât  $\sphericalangle AOC = 4 \cdot \sphericalangle BOC$  și  $\sphericalangle AOD = 2 \cdot \sphericalangle BOC$ .

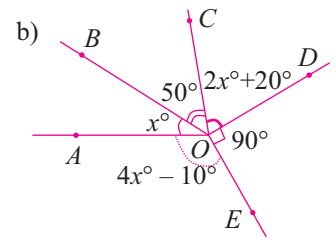
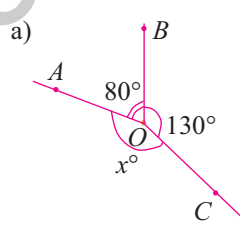
- a) Calculați măsurile unghiurilor  $AOC$  și  $AOD$ .
- b) Arătați că unghiurile  $AOC$ ,  $BOC$ ,  $BOD$  și  $AOD$  sunt unghiuri în jurul punctului  $O$ .

**18.** Interioarele unghiurilor proprii  $MON$  și  $NOP$  nu au puncte interioare comune. Dacă  $\sphericalangle MON + \sphericalangle NOP > 180^\circ$ , arătați că unghiurile  $MON$ ,  $NOP$  și  $POM$  sunt unghiuri în jurul punctului  $O$ .

**19.** Fie  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ . În jurul unui punct  $O$  se construiesc  $n$  unghiuri, astfel încât  $\sphericalangle M_0OM_1 = 1^\circ$ ,  $\sphericalangle M_1OM_2 = 2^\circ$ ,  $\sphericalangle M_2OM_3 = 3^\circ$ ,  $\sphericalangle M_{n-1}OM_n = n^\circ$  și  $\sphericalangle M_nOM_0 = x^\circ$ ,  $x \in \mathbb{N}$ .

- a) Aflați valoarea maximă a lui  $n$  și calculați  $\sphericalangle M_nOM_0$  pentru această valoare.
- b) Pentru valoarea maximă a lui  $n$ , calculată la punctul a), arătați că unghiurile  $M_{15}OM_{20}$  și  $M_{20}OM_{24}$  sunt unghiuri drepte, iar unghiul  $M_{15}OM_{24}$  este unghi alungit.

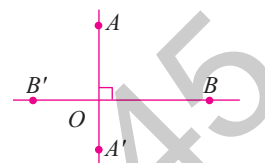
**20.** Studiați cu atenție figurile de mai jos și calculați măsurile unghiurilor necunoscute:



**PE-PP** 1. Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție). Oblice



Considerăm un unghi drept  $AOB$  și semidreptele opuse laturilor unghiului  $AOB$ . Notăm cu  $OA'$  și  $OB'$  aceste semidrepte.  $\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle AOB$  ca unghiuri opuse la vârf și, ca urmare,  $\sphericalangle A'OB' = 90^\circ$ , adică este unghi drept. Unghiurile  $AOB'$  și  $AOB$  sunt adiacente suplementare și, ca urmare,  $\sphericalangle AOB' = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , adică este unghi drept. Unghiurile  $BOA'$  și  $AOB$  sunt adiacente suplementare și, ca urmare,  $\sphericalangle BOA' = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , adică este unghi drept.



Spunem că **dreptele  $AA'$  și  $BB'$  sunt perpendiculare** sau că **dreapta  $AA'$  este perpendiculară pe dreapta  $BB'$**  și notăm  $AA' \perp BB'$ .

Două drepte concurente  $c$  și  $d$ , care nu sunt perpendiculare, se numesc **drepte oblice**. Dreapta  $c$  este oblică față de dreapta  $d$  și dreapta  $d$  este oblică față de dreapta  $c$  pentru că cele două drepte nu formează un unghi drept.



**Observații:**

1. Dacă două drepte sunt **perpendiculare**, atunci fiecare dintre ele este **perpendiculară pe cealaltă**. Dacă  $AA' \perp BB'$ , atunci  $BB' \perp AA'$ .
2. Două drepte perpendiculare formează **patru unghiuri drepte**.
3. Două **drepte oblice** formează **două unghiuri ascuțite și două unghiuri obtuze**.

**Definiție:** Două drepte concurente care formează un unghi cu măsura egală cu  $90^\circ$  se numesc **drepte perpendiculare**. Dacă  $a$  și  $b$  sunt două drepte perpendiculare, notăm  $a \perp b$ . Două drepte perpendiculare determină patru unghiuri drepte (figura 1).

- **Se dă** o dreaptă  $d$  și un punct  $A$  care nu aparține dreptei  $d$  (figura 2). **Se cere** să se construiască dreapta  $d'$  perpendiculară pe dreapta  $d$  și careia să îi aparțină punctul  $A$ .

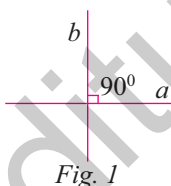


Fig. 1

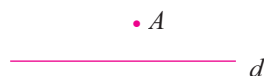


Fig. 2

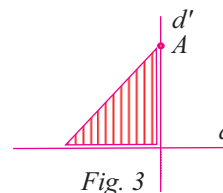


Fig. 3

Cerința de mai sus se formulează mai scurt astfel: **se cere să se coboare din punctul  $A$  perpendiculara pe dreapta  $d$** . Construcția se face cu echerul (figura 3) sau cu rigla neagrădată și compasul (figura 4).

**Construcția perpendicularei pe o dreaptă dată ( $d$ ) dintr-un punct exterior acesteia ( $A$ )**

**A. Folosind echerul și rigla neagrădată**

- Așezăm echerul de aceeași parte cu punctul  $A$  față de dreapta  $d$ , astfel încât una dintre laturile care formează unghiul drept să se suprapună dreptei  $d$ , iar cealaltă latură să treacă prin punctul  $A$ .

- Trăsăm dreapta care conține punctul  $A$  după latura echerului care se suprapune pe acest punct, notăm cu  $d'$  această dreaptă și cu  $A'$  punctul de intersecție a acestei drepte cu dreapta  $d$ .

- Prelungim dreapta  $d'$  dincolo de  $A'$ , folosind rigla negradată, și  $d'$  este perpendiculara din punctul  $A$  pe dreapta  $d$ . Notăm  $d' \perp d$  și  $A \in d'$ .

### B. Folosind compasul și rigla negradată

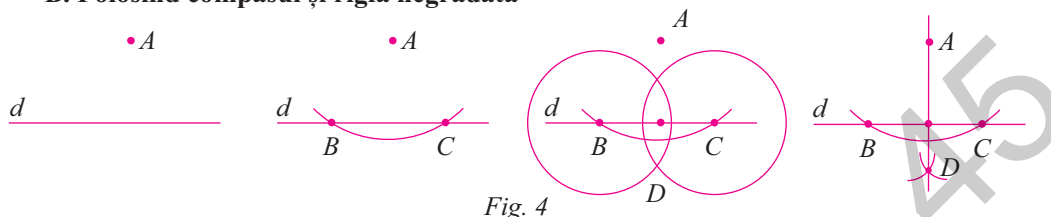


Fig. 4

- Fixăm compasul cu acul în punctul  $A$  și trăsăm un cerc de rază convenabilă care intersectează dreapta  $d$  în două puncte  $B$  și  $C$ .

- Așezăm acul compasului pe rând în punctele  $B$  și  $C$  și trăsăm câte un cerc cu aceeași deschidere a compasului care să fie mai mare sau egală decât jumătate din distanța  $BC$  și notăm cu  $D$  unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri.

- Cu o riglă trăsăm dreapta  $AD$  și  $AD$  este perpendiculara din punctul  $A$  pe dreapta  $d$ . Notăm  $AD \perp d$  (figura 4).

- **Se dă** o dreaptă  $d$  și un punct  $A$  care aparține dreptei  $d$  (figura 5).

**Se cere** să se construiască dreapta  $d'$  perpendiculară pe  $d$  și careia să îi aparțină punctul  $A$ .

Cerința se poate formula și astfel: **se cere să se ridice în punctul  $A$  perpendiculara pe dreapta  $d$** . Construcția se face cu echerul (figura 6) sau cu rigla negradată și compasul (figura 7).

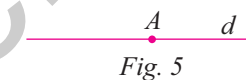


Fig. 5

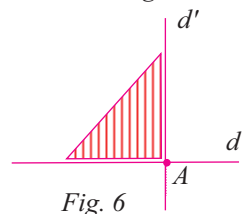


Fig. 6

### Construcția perpendicularii pe o dreaptă dată ( $d$ ) într-un punct al acesteia ( $A$ )

#### A. Folosind echerul și rigla negradată

- Așezăm echerul, astfel încât una dintre cele două laturi ale acestuia care formează unghiul drept să se suprapună dreptei  $d$ , iar vârful unghiului drept al echerului să coincidă cu punctul  $A$ .

- Trăsăm dreapta care conține punctul  $A$  după cealaltă latură a echerului care se suprapune pe punctul  $A$  și o notăm cu  $d'$ .

- Prelungim dreapta  $d'$  dincolo de punctul  $A$ , folosind rigla negradată. Dreapta  $d'$  este perpendiculara în punctul  $A$  pe dreapta  $d$ . Notăm  $d' \perp d$  și  $A \in d'$ .

#### B. Folosind compasul și rigla negradată

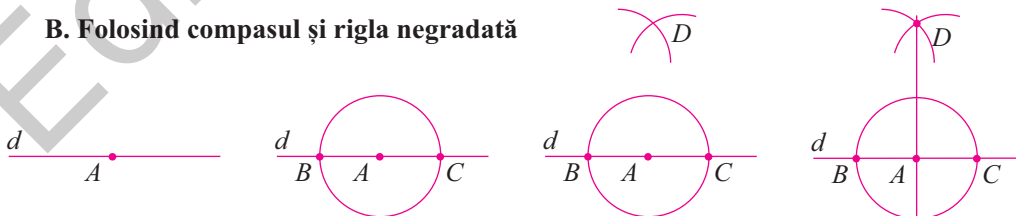


Fig. 7

- Trăsăm un cerc de rază convenabilă care intersectează dreapta  $d$  în două puncte  $B$  și  $C$ .

- Așezăm acul compasului pe rând în punctele  $B$  și  $C$  și trăsăm câte un cerc cu aceeași deschidere a compasului care să fie mai mare decât jumătate din distanța  $BC$  și notăm cu  $D$  unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri.

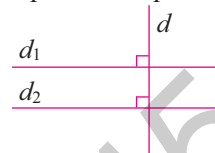


- Cu o riglă negradată trasăm dreapta  $AD$ . Dreapta  $AD$  este perpendiculara în punctul  $A$  pe dreapta  $d$ . Notăm  $AD \perp d$ .

### Probleme rezolvate

1. Se consideră două drepte coplanare  $d_1$  și  $d_2$  perpendiculare pe o dreaptă  $d$ . Demonstrați că dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt paralele.

**Rezolvare:** Dacă  $d_1 \perp d$  și  $d_2 \perp d$ , atunci unghiurile marcate pe figură sunt unghiuri drepte. Dar unghiurile marcate sunt unghiuri corespondente pentru dreptele  $d_1$ ,  $d_2$  și secanta  $d$  și conform criteriului de paralelism, *dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele*, rezultă că  $d_1 \parallel d_2$ .



### Reținem!

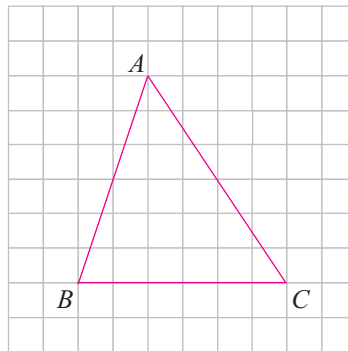
- Două drepte concurente  $a$  și  $b$  care formează un unghi cu măsura de  $90^\circ$  se numesc **drepte perpendiculare** și notăm  $a \perp b$ .
- Două drepte perpendiculare formează **patru unghiuri drepte**.
- Două drepte concurente  $c$  și  $d$  care nu sunt perpendiculare se numesc **oblice**; dreapta  $c$  este **oblică** față de dreapta  $d$  și dreapta  $d$  este **oblică** față de dreapta  $c$ .
- Două oblice formează **două unghiuri ascuțite** și **două unghiuri obtuze**, congruente două câte două ca unghiuri opuse la vârf.
- Dintr-un punct exterior unei drepte putem construi **o singură perpendiculară pe acea dreaptă și oricât de multe oblice**.
- Într-un punct al unei drepte putem construi **o singură perpendiculară pe acea dreaptă**.
- Două drepte coplanare perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt **paralele**.

2. Folosind foaia cu pătrățele a caietului de matematică, copiați pe caiete triunghiul  $ABC$  din figura alăturată.

a) Construiți perpendiculara în punctul  $B$  pe dreapta  $AB$  și perpendiculara în punctul  $C$  pe dreapta  $AC$ .

b) Construiți perpendiculara din punctul  $A$  pe dreapta  $BC$ , notați cu  $A'$  piciorul acestei perpendiculare și precizați care este distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $BC$ .

c) Construiți perpendicularele în punctele  $B$  și  $C$  pe dreapta  $BC$  și precizați distanțele de la punctele  $B$ , respectiv  $C$ , la dreapta  $BC$ .

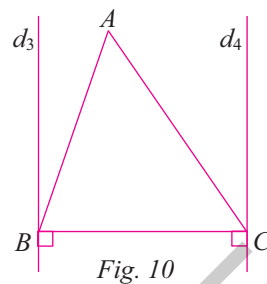
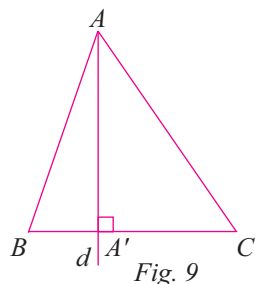
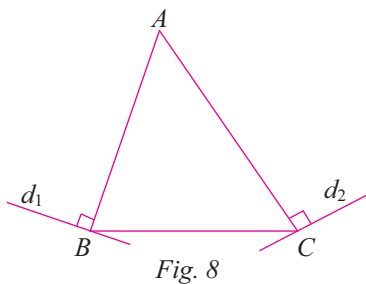


### Rezolvare:

a) Perpendiculara în punctul  $B$  pe dreapta  $AB$  este dreapta  $d_1$ ,  $d_1 \perp AB$  și perpendiculara în punctul  $C$  pe dreapta  $AC$  este dreapta  $d_2$ ,  $d_2 \perp AC$  (figura 8).

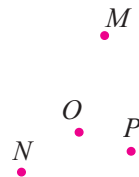
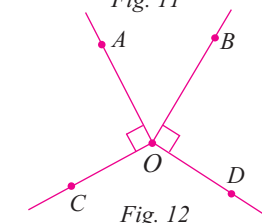
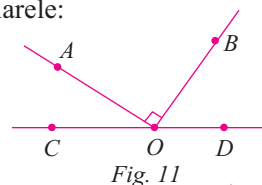
b) Perpendiculara din punctul  $A$  pe dreapta  $BC$  este dreapta  $d$ . Piciorul perpendicularei din punctul  $A$  pe dreapta  $BC$  este punctul  $A'$ . Distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $BC$  este lungimea segmentului  $AA'$ , adică  $d(A, BC) = AA'$  (figura 9).

c) Perpendiculara în punctul  $B$  pe dreapta  $BC$  este dreapta  $d_3$ , distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $BC$  este egală cu zero, deoarece punctul  $B$  se află pe dreapta  $BC$  și notăm  $d(B, BC) = 0$ . Perpendiculara în punctul  $C$  pe dreapta  $BC$  este dreapta  $d_4$ , distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $BC$  este egală cu zero, deoarece punctul  $C$  se află pe dreapta  $BC$  și notăm  $d(C, BC) = 0$  (figura 10).



### ● ● ● activități de învățare ● ● ●

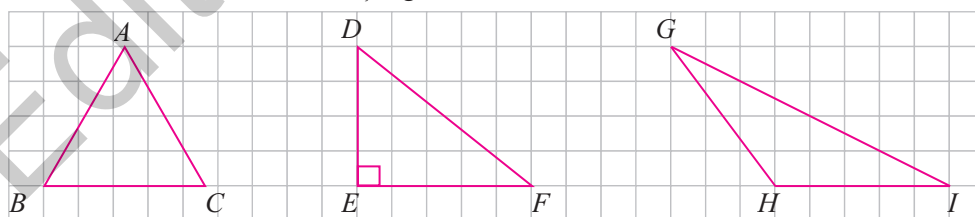
1. Desenați două drepte concurente. Verificați cu ajutorul echerului dacă sunt perpendiculare sau oblice.
2. Desenați o dreaptă  $d$  și două puncte  $A$  și  $B$  care aparțin dreptei ( $A \in d$  și  $B \in d$ ). Dacă  $O$  este un punct exterior dreptei  $d$ , construiți perpendiculara  $OA$  și oblica  $OB$ .
3. Desenați o dreaptă  $d$  și un punct  $A$  ce nu aparține dreptei ( $A \notin d$ ).
  - a) Trasați cu echerul: perpendiculara din  $A$  pe  $d$  și o oblică careia să îi aparțină punctul  $A$ .
  - b) Comparați măsurile unghiurilor determinate de perpendiculară și, respectiv, de oblică cu dreapta  $d$ .
4. Desenați o dreaptă  $d$  și apoi punctele  $A, B, C, D$  situate la distanțele de 2 cm, 3 cm, 1 cm și, respectiv, 0 cm de dreapta  $d$ .
5. Desenați trei puncte necoliniare  $M, N, P$ . Construiți perpendicularele:
  - a) în punctul  $M$  pe  $MN$  și  $MP$ ;
  - b) în punctul  $N$  pe  $MN$  și  $NP$ ;
  - c) în punctul  $P$  pe  $MP$  și  $NP$ .
6. Știind că  $OA \perp OB$  (figura 11), calculați suma măsurilor unghiurilor  $AOC$  și  $BOD$ .
7. Desenați patru drepte  $a, b, c, d$  concurente într-un punct  $O$ , care să determine opt unghiuri congruente în jurul punctului  $O$ . Numiți dreptele perpendiculare.
8. Se știe că  $OA \perp OC$  și  $OB \perp OD$  (figura 12).
  - a) Calculați suma măsurilor unghiurilor  $AOB$  și  $COD$ .
  - b) Demonstrați că unghiurile  $AOD$  și  $BOC$  sunt congruente.
9. Se consideră trei puncte necoliniare  $M, N$  și  $P$ . Desenați perpendicularele din punctele  $M, N$  și  $P$  pe dreptele  $NP, MP$  și  $MN$ .
10. a) Desenați trei puncte necoliniare  $A, B$  și  $C$ .  
 b) Notați cu  $M, N$  și  $P$  mijloacele segmentelor  $AB, BC$  și  $AC$ .  
 c) Construiți perpendiculara în punctul  $M$  pe dreapta  $AB$ , perpendiculara în punctul  $N$  pe dreapta  $BC$  și perpendiculara în punctul  $P$  pe dreapta  $AC$ .
11. Desenați două unghiuri  $AOB$  și  $BOC$  adiacente și complementare. Ce puteți spune despre dreptele  $AO$  și  $CO$ ? Justificați.
12. a) Analizați figura alăturată și copiați-o în caietele voastre.  
 b) Construiți perpendicularele din punctul  $O$  pe dreapta  $MN$ , din punctul  $O$  pe dreapta  $NP$  și din punctul  $O$  pe dreapta  $PM$ . Notați-le cu  $d_1, d_2$  și  $d_3$ .



- 13.** Desenați două unghiuri  $AOB$  și  $BOC$  adiacente și suplementare. Notați cu  $OM$  bisectoarea unghiului  $AOB$  și cu  $ON$  bisectoarea unghiului  $BOC$ . Ce puteți spune despre dreptele  $OM$  și  $ON$ ? Justificați.
- 14.** Fie un segment  $AB$  cu lungimea de 8 cm și  $M$  un punct pe dreapta  $AB$ . Dacă  $P$  este mijlocul segmentului  $AM$ , iar  $Q$  este mijlocul segmentului  $BM$ , calculați distanța de la punctul  $P$  la dreapta perpendiculară pe  $AB$  în punctul  $Q$ .
- 15.** Fie  $\sphericalangle MON$  un unghi cu măsura de  $70^\circ$ . Se consideră un punct  $P$ , astfel încât dreptele  $OP$  și  $OM$  să fie perpendiculare. Calculați măsura unghiului  $PON$ .
- 16.** Fie  $\sphericalangle AOB$  un unghi cu măsura de  $130^\circ$ .
- Construiți dreapta  $MO$ , astfel încât  $MO \perp OB$ .
  - Calculați măsura unghiului  $MOA$ .
- 17.** Se consideră un unghi obtuz  $BAC$  cu măsura de  $150^\circ$ .
- Construiți  $MA \perp AB$ ,  $M \in \text{Int}(\sphericalangle BAC)$ .
  - Construiți  $NA \perp AC$ ,  $N \in \text{Int}(\sphericalangle BAC)$ .
  - Calculați măsura unghiului  $MAN$ .
- 18.** Se consideră un unghi ascuțit  $AOB$  și se construiesc  $OM \perp OA$  și  $ON \perp OB$ .
- Realizați un desen care să ilustreze datele problemei.
  - Călin susține că unghiurile  $AOB$  și  $MON$  sunt congruente, iar Alexandru susține că unghiurile  $AOB$  și  $MON$  sunt suplementare. Demonstrați cine are dreptate.
- 19.** Demonstrați că bisectoarele celor patru unghiuri formate de două drepte concurente sunt drepte perpendiculare.
- 20.** Realizați un desen, știind că semidreptele  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  și  $OT$  formează unghiurile congruente  $XOT$ ,  $YOZ$  și că  $\sphericalangle XOZ + \sphericalangle YOT = 180^\circ$ . Demonstrați că dreptele  $OX$  și  $OY$ , respectiv dreptele  $OZ$  și  $OT$  sunt perpendiculare.

## PE-PP 2. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice

- Desenați un triunghi dreptunghic  $ABC$  cu unghiul drept în  $A$ .
  - Numiți o oblică și o perpendiculară pentru dreapta  $AB$ .
  - Numiți o oblică și o perpendiculară pentru dreapta  $AC$ .
- Urmăriți cu atenție triunghiurile din figura de mai jos și, folosind rețeaua cu pătrățele din caietul de matematică, desenați figurile în caiet.



- Construiți și numiți perpendicularele din vârfurile  $A$ ,  $D$  și  $G$  pe laturile opuse  $BC$ ,  $EF$ , respectiv  $HI$ .
- Numiți oblicele din vârfurile  $A$ ,  $D$ , respectiv  $G$ .

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

### TESTUL 1

#### I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

- (0,5p) 1. Mediatoarea unui segment  $AB$  este .....
- (0,5p) 2. O dreaptă este axă de simetrie a unei figuri geometrice dacă .....
- (0,5p) 3. Pătratul are ..... axe de simetrie.
- (0,5p) 4. Prin distanța de la un punct  $A$  la o dreaptă  $d$  se înțelege .....

#### II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (2 puncte)

Dreptele  $MN$  și  $d$  sunt paralele. Punctul  $O$  este mijlocul segmentului  $MN$ , iar punctele  $A, B, C$  și  $D$  aparțin dreptei  $d$ , astfel încât:  
 $\sphericalangle AON = 20^\circ + \sphericalangle BON = 50^\circ + \sphericalangle CON = 70^\circ + \sphericalangle DON = 140^\circ$ .

- (0,5p) 1. Pe mediatoarea segmentului  $MN$  se află:  
 A. punctul  $D$ ; B. punctul  $C$ ; C. punctul  $B$ ; D. punctul  $A$ .
- (0,5p) 2. Dreapta  $d$  este perpendiculară pe:  
 A. dreapta  $OD$ ; B. dreapta  $OC$ ; C. dreapta  $OB$ ; D. dreapta  $OA$ .
- (0,5p) 3. Distanța de la punctul  $O$  la dreapta  $d$  este lungimea segmentului:  
 A.  $OD$ ; B.  $OA$ ; C.  $OC$ ; D.  $OB$ .
- (0,5p) 4. Bisectoarea unghiului  $AON$  este semidreapta:  
 A.  $OD$ ; B.  $OC$ ; C.  $OB$ ; D.  $OA$ .

#### III. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Se consideră un unghi alungit  $AOE$  și în același semiplan determinat de dreapta  $AO$  se iau semidreptele  $OB, OC$  și  $OD$ , astfel încât  $OC \perp OA$  și  $OD \perp OB$ . Dacă măsura unghiului  $AOB$  este jumătate din măsura unghiului  $DOE$ , atunci:

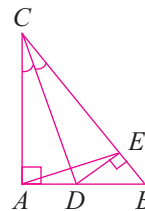
- | A                                       | B                |
|---|------------------|
| (0,5p) 1. $\sphericalangle AOB = \dots$ | a) $120^\circ$ ; |
| (0,5p) 2. $\sphericalangle DOE = \dots$ | b) $150^\circ$ ; |
| (0,5p) 3. $\sphericalangle AOD = \dots$ | c) $90^\circ$ ;  |
| (0,5p) 4. $\sphericalangle BOE = \dots$ | d) $60^\circ$ ;  |
|   | e) $30^\circ$ .  |

#### IV. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. Se consideră un unghi alungit  $AOE$  și în același semiplan determinat de dreapta  $AO$  se iau unghiurile adiacente  $AOB, BOC, COD$  și  $DOE$ , ale căror măsuri verifică relația  $\sphericalangle AOB = \frac{1}{3} \cdot (\sphericalangle BOC) = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle COD) = \frac{1}{6} \cdot (\sphericalangle DOE)$ .

- (1p) a) Calculați măsurile unghiurilor  $AOB, BOC, COD$  și  $DOE$ .
- (0,5p) b) Arătați că  $AO \perp DO$ .
- (0,5p) c) Arătați că  $DO \perp EO$ .

(1p) 2. În figura alăturată, se știe că  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ,  $CD$  este bisectoarea unghiului  $ACB$  și  $DE \perp BC$ . Arătați că punctul  $D$  se află pe mediatoarea segmentului  $AE$ .



## Test de autoevaluare

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

### I. Completați pe fișa de evaluare spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) 1. Punctele de pe mediatoarea unui segment au proprietatea că .....

(0,5p) 2. Punctele de pe bisectoarea unui unghi au proprietatea că .....

(0,5p) 3. Dacă punctul  $A$  este simetricul punctului  $B$  față de dreapta  $d$ , atunci dreapta  $d$  este .....

(0,5p) 4. Prin distanța de la un punct  $A$  la o dreaptă  $d$  înțelegem .....

### II. Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect, știind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) 1. Dacă  $AO \perp AB$ , atunci unghiul  $\sphericalangle AOB$  este:

- A. ascuțit;      B. obtuz;      C. drept;      D. alungit.

(0,5p) 2. Dacă  $MO \perp AB$  și  $O$  este mijlocul segmentului  $AB$ , atunci  $MO$  este:

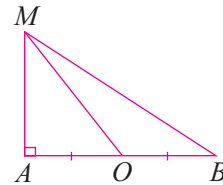
- A. oblică față de  $AB$ ;      B. bisectoarea unghiului  $AOM$ ;  
C. mediatoarea segmentului  $AB$ ;      D. bisectoarea unghiului  $BOM$ .

(0,5p) 3. În figura alăturată, punctul  $O$  este mijlocul segmentului  $AB$ , iar  $\sphericalangle MAB$  este un unghi drept. Distanța de la punctul  $M$  la dreapta  $OB$  este:

- A.  $MA$ ;      B.  $MO$ ;  
C.  $MB$ ;      D.  $AO$ .

(0,5p) 4. Fie  $M$  mijlocul unui segment  $AB$ . Se notează cu  $A'$ ,  $B'$  și  $M'$  simetricile punctelor  $A$ ,  $B$  și, respectiv,  $M$  față de o dreaptă  $d$ . Simetricul segmentului  $AB$  față de dreapta  $d$  este:

- A.  $AA'$ ;      B.  $A'M$ ;      C.  $B'M$ ;      D.  $A'B'$ .



### III. Uniți prin săgeți fiecare enunț, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Se consideră figura de mai jos. Se știe că  $A'$  este simetricul punctului  $A$  față de dreapta  $d$ ,  $B'B \perp d$  și  $BQ = B'Q$ .

(0,5p) a) Piciorul perpendicularei din  $A$  pe dreapta  $d$  este ...

1)  $A'$

(0,5p) b) Simetricul punctului  $B$  față de dreapta  $d$  este ...

2)  $O$

(0,5p) c) Distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $d$  este ...

3)  $Q$

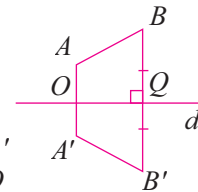
(0,5p) d) Simetricul segmentului  $AB$  față de dreapta  $d$  este ...

4)  $B'$

5)  $AA'$

6)  $AO$

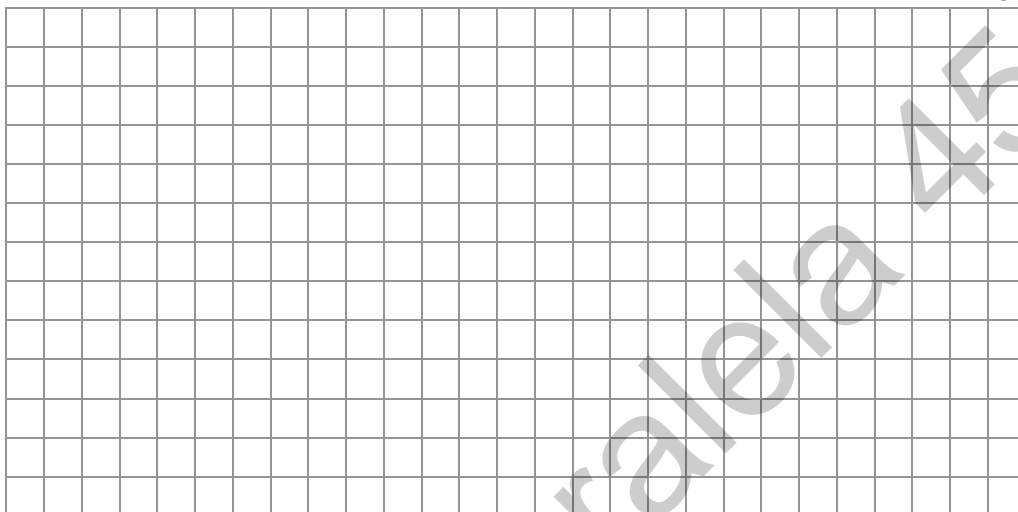
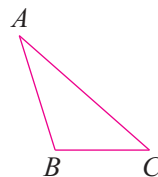
7)  $A'B'$



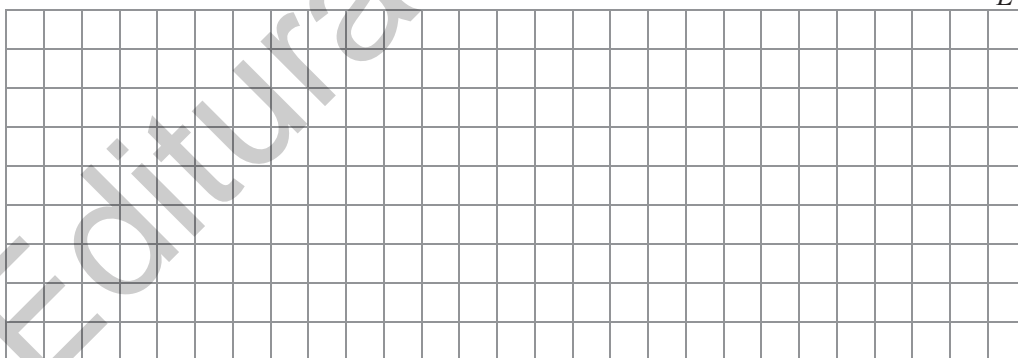
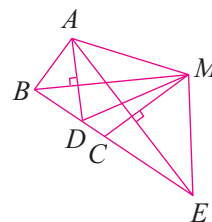
La problemele IV și V scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(2p) **IV.** În figura alăturată, măsura unghiului  $B$  este egală cu  $120^\circ$ .

- Construiți perpendiculara din punctul  $A$  pe dreapta  $BC$ . Puneți în evidență distanța  $d(A, BC)$ .
- Construiți perpendiculara din punctul  $C$  pe dreapta  $AB$ . Puneți în evidență distanța  $d(C, AB)$ .



(1p) **V.** În figura alăturată, punctul  $B$  se află pe mediatoarea segmentului  $AD$ , punctul  $C$  se află pe mediatoarea segmentului  $AE$  și  $M$  este punctul de intersecție a dreptelor  $BM$  și  $CM$ . Arătați că punctul  $M$  se află pe mediatoarea segmentului  $DE$ .



Matematică. Clasa a VI-a

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

# PERPEDICULARITATE

- DREPTE PERPENDICULARE ÎN PLAN (DEFINIȚIE, NOTAȚIE, CONSTRUCȚIE)
- OBLICE

1

- APLICAȚII PRACTICE ÎN POLIGOANE ȘI CORPURI GEOMETRICE

2

DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ

3

- MEDIATOAREA UNUI SEGMENT
- CONSTRUCȚIA MEDIATOAREI UNUI SEGMENT
- SIMETRIA FAȚĂ DE O DREAPTĂ

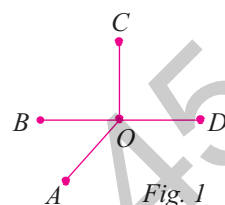
4

**PE-PP 1. Cerc. Elemente în cerc: centru, coardă, diametru, arc de cerc**



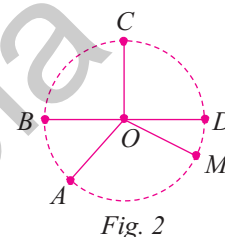
În figura 1, punctele  $A, B, C$  și  $D$  sunt situate la 2 cm de punctul  $O$ . Se pune problema dacă mai putem găsi și alte puncte situate la distanța de 2 cm față de punctul  $O$ .

Răspunsul îl găsim observând figura 2. Fie  $M$  un punct oarecare pe cerc. Segmentul  $OM$  are tot 2 cm. Cu alte cuvinte, punctele de pe cerc sunt situate la aceeași distanță de punctul  $O$ . Punctul  $O$  este **centrul cercului**, iar lungimea segmentelor congruente  $OA, OB, OC, OD, OM$  reprezintă ceea ce în limbaj matematic numim **raza cercului**.



**Definiție.** Fiind dat un punct  $O$  și un număr pozitiv  $r$ , se numește **cerc de centru  $O$  și rază  $r$**  mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanța  $r$  de punctul  $O$ .

Altfel spus, cercul este mulțimea tuturor punctelor egal depărtate de un punct fix. Punctul fix, adică punctul  $O$ , se numește **centrul cercului**, iar numărul  $r$  se numește **raza cercului**.



**Cercul de centru  $O$  și rază  $r$  um\*** se notează  $\mathcal{C}(O, r \text{ um})$ , dar se mai folosesc și notațiile  $\mathcal{C}(O, r)$  sau  $\mathcal{C}$ .

Așa cum știm din clasele anterioare, cercul se desenează cu ajutorul compasului (figura 3).

În anumite situații, prin **rază** se poate înțelege și **segmentul** care unește **centrul cercului cu un punct al cercului**. În figura 4,  $OM$  este raza cercului.

Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă**. În figura 5,  $AB$  este coardă. O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**. În figura 6,  $CD$  este diametru. Lungimea oricărui diametru este de două ori mai mare decât raza, adică  $CD = 2r$ .

Cele două puncte de pe cerc care sunt extremitățile diametrului se numesc **puncte diametral opuse**.

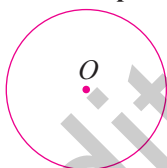


Fig. 3

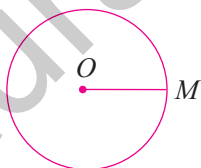


Fig. 4

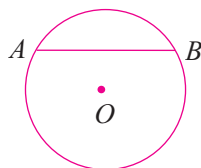


Fig. 5

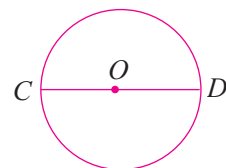


Fig. 6

Două cercuri se numesc **cercuri congruente** dacă au razele egale și scriem  $\mathcal{C}(O_1, r_1) \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$  dacă și numai dacă  $r_1 = r_2$ .

Un punct oarecare se numește **interior unui cerc** dacă distanța de la centrul cercului la acel punct este mai mică decât raza.

În figura 7, observăm că  $OM < OA$ , adică  $OM < r$ . Înseamnă că punctul  $M$  este **punct interior cercului** de centru  $O$  și rază  $OA$ .

Un punct oarecare se numește **exterior unui cerc** dacă distanța de la centrul cercului la acel punct este mai mare decât raza.

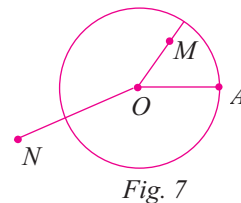


Fig. 7



În figura 7, observăm că  $ON > OA$ , adică  $ON > r$ . Înseamnă că  $N$  este **punct exterior** cercului de centru  $O$  și rază  $OA$ .

Dacă considerăm mulțimea punctelor interioare cercului de centru  $O$  și rază  $OA$  reunită cu mulțimea punctelor cercului obținem **discul de centru  $O$  și rază  $OA$**  (figura 8).

Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numește **arc de cerc**, iar punctele care determină arcul de cerc se numesc **capetele sau extremitățile arcului**. Dacă extremitățile unui arc de cerc sunt puncte diametral opuse, arcul de cerc se numește **semicerc**.

Două puncte  $A$  și  $B$ , care nu sunt diametral opuse, determină pe un cerc două arce: **arcul mic  $\widehat{AB}$**  (figura 9) și **arcul mare  $\widehat{AB}$**  (figura 10).

### Observații:

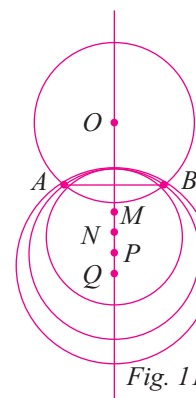
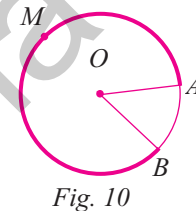
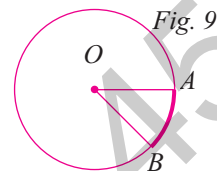
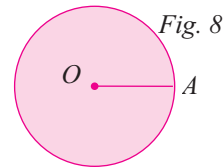
1. Când scriem  $\widehat{AB}$  (folosind doar două litere), ne referim la arcul mic  $\widehat{AB}$ .

2. Pentru a ne referi la arcul mare  $\widehat{AB}$ , vom folosi încă un punct al arcului, diferit de extremitățile acestuia. În figura 10, pentru a ne referi la arcul mare  $\widehat{AB}$ , vom scrie arcul  $\widehat{AMB}$ .

În figura 11, este reprezentat un cerc de centru  $O$  și rază 1,5 cm. Punctele  $A$  și  $B$  aparțin cercului și  $OM$  este mediatoarea segmentului  $AB$ . Fie  $N$  un punct oarecare pe dreapta  $OM$ . Avem  $NA = NB$  (orice punct de pe mediatoare este egal depărtat de capetele segmentului) și cercul cu centrul în  $N$  și rază  $NA$  trece și prin punctul  $B$ . Cu alte cuvinte, am găsit două cercuri care trec prin punctele  $A$  și  $B$ . Asemănător putem arăta că prin punctele  $A$  și  $B$  trec și alte cercuri. Cum mediatoarea segmentului  $AB$  conține o infinitate de puncte, toate egal depărtate de  $A$  și  $B$ , rezultă că **există o infinitate de cercuri care trec prin punctele  $A$  și  $B$ , centrele acestor cercuri aflându-se pe mediatoarea segmentului  $AB$ .**

### Reținem!

- Fiind dat un punct  $O$  și un număr pozitiv  $r$ , se numește **cerc de centru  $O$  și rază  $r$**  și notăm  $\mathcal{C}(O, r)$  mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanță  $r$  față de punctul  $O$ .
- Prin **rază** se poate înțelege **distanța de la centrul cercului la un punct de pe cerc sau segmentul care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc**.
- Un punct oarecare al planului poate avea următoarele poziții:
  - **interior unui cerc**, dacă distanța de la centrul cercului la punct este mai mică decât raza;
  - **aparține cercului**, dacă distanța de la centrul cercului la punct este egală cu raza;
  - **exterior cercului**, dacă distanța de la centrul cercului la punct este mai mare decât raza.
- Segmentul care are ca extremități două puncte de pe cerc se numește **coardă**.
- Coarda care conține centrul cercului se numește **diametru**. Dacă  $MN$  este diametru, atunci punctele  $M$  și  $N$  se numesc **puncte diametral opuse**.
- Două cercuri care au razele egale se numesc **cercuri congruente**.



- Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numește **arc de cerc**. Oricare două puncte distincte ale unui cerc determină două arce de cerc: **un arc mic** și **un arc mare**. Dacă cele două puncte sunt diametral opuse, atunci cele două arce devin semicercuri.

- **Centrul cercului** este mijlocul oricărui diametru. **Lungimea diametrului** este dublul lungimii razei.

- Orice dreaptă determinată de diametrul unui cerc este **axă de simetrie a cercului**.

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

1. a) Scrieți definiția cercului.

b) Desenați un cerc de centru  $O$ , cu raza de 1,5 cm și puneți în evidență diametrul  $AB$ , raza  $OM$  și coarda  $CD$ .

2. Desenați un cerc de centru  $O$  și rază  $r = 1,5$  cm. Luați apoi punctele  $A, B, C, D, E$  și  $F$ , astfel încât  $OA = 1$  cm,  $OB = 2$  cm,  $OC = 1$  cm,  $OD = 2,5$  cm,  $OE = 1,5$  cm,  $OF = \frac{4,5}{3}$  cm și

$OG = \frac{5}{4}$  cm. Scrieți punctele:

- a) interioare cercului;                      b) exterioare cercului;                      c) care aparțin cercului;  
d) care aparțin discului de centru  $O$  și rază de 1,5 cm.

3. a) Desenați un punct  $A$  și trei cercuri care trec prin punctul  $A$ . Câte astfel de cercuri puteți desena?

b) Desenați două puncte distincte  $A$  și  $B$  și trei cercuri care trec prin aceste puncte. Există mai multe cercuri care trec prin cele două puncte?

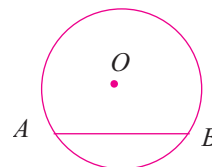
4. Se consideră cercul de centru  $O$  și rază 12 cm. Se ia un punct  $A$ , astfel încât  $OA = 119$  mm. Stabiliți poziția punctului  $A$  față de cercul dat.

5. Se consideră cercul de centru  $O$  și rază 40 mm. Se ia un punct  $B$ , astfel încât  $OB = 4,1$  cm. Stabiliți poziția punctului  $B$  față de cercul dat.

6. Punctele  $M$  și  $N$  distincte aparțin unui cerc. Dacă punctele  $P$  și  $Q$  sunt mijloacele arcelor determinate de punctele  $M$  și  $N$  pe cerc, arătați că segmentul  $PQ$  este diametrul cercului.

7. În figura alăturată, punctele  $A$  și  $B$  aparțin cercului de centru  $O$  și rază 1,5 cm.

- a) Notați cu  $M$  mijlocul coardei  $AB$ .  
b) Notați cu  $N$  intersecția dreptei  $OM$  cu cercul.  
c) Numiți arcele de cerc formate.  
d) Ce puteți spune despre coardele  $NA$  și  $NB$ ? Justificați.



8. a) Desenați un cerc cu centrul într-un punct  $O$  și cu raza de 2 cm.

b) Desenați trei axe de simetrie,  $a, b, c$ , ale cercului.

c) Notați cu  $A$  și  $A'$  punctele de intersecție dintre dreapta  $a$  și cerc, cu  $B$  și  $B'$  punctele de intersecție dintre dreapta  $b$  și cerc și cu  $C$  și  $C'$  punctele de intersecție dintre dreapta  $c$  și cerc.

d) Ce reprezintă pentru cerc segmentele  $AA', BB'$  și  $CC'$ ?

9. Fie  $A$  un punct interior unui cerc. Construiți o coardă care să aibă ca mijloc punctul  $A$ .

10. a) Desenați trei puncte necoliniare  $A, B$  și  $C$ .

b) Desenați trei cercuri care trec prin punctele  $A$  și  $B$ . Unde se află centrele acestor cercuri?

c) Desenați trei cercuri care trec prin punctele  $B$  și  $C$ . Unde se află centrele acestor cercuri?

d) Puteți desena un cerc care să treacă prin toate cele trei puncte?

**11.** a) Desenați un segment  $MN$  cu lungimea de 3 cm. Notați cu  $P$  un punct interior segmentului  $MN$ .

b) Construiți cercurile  $\mathcal{C}_1$  de diametru  $MP$ , respectiv  $\mathcal{C}_2$  de diametru  $NP$ .

c) Aflați distanța dintre centrele celor două cercuri construite la punctul b).

**12.** Construiți un cerc de centru  $O$  și rază  $r$ , apoi reprezentați: un punct  $M$  interior cercului, două puncte  $N$  și  $P$  pe cerc, astfel încât punctul  $O$  să aparțină segmentului  $NP$ , și un punct  $Q$  exterior cercului. Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile  $<$ ,  $=$ ,  $>$ , astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a)  $MO$  .....  $r$ ;

b)  $NO$  .....  $r$ ;

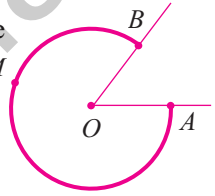
c)  $PO$  .....  $r$ ;

d)  $QO$  .....  $r$ ;

e)  $NP$  .....  $2r$ ;

f)  $MN$  .....  $NP$ .

## PE-PP 2. Unghi la centru. Măsură

Unghiul  $AOB$  din figura alăturată are vârful în centrul cercului și are măsura de  $37^\circ$ . Spunem despre unghiul  $AOB$  că este **unghi la centru**. 

### Definiții:

- Se numește **unghi la centru** un unghi propriu al cărui vârf este centrul unui cerc.

Trebuie să remarcăm că orice arc de cerc (mic sau mare) determină în mod **unic** un unghi la centru.

- Se numește **măsura unui arc mic de cerc** măsura unghiului la centru determinat de arcul respectiv.

- Se numește **măsura unui arc mare de cerc** numărul egal cu  $360^\circ$  minus măsura unghiului la centru determinat de arcul respectiv.

În figura de mai sus, măsura arcului mic  $\widehat{AB}$  este egală cu măsura unghiului la centru  $AOB$ . Cum măsura unghiului  $AOB$  este egală cu  $37^\circ$  înseamnă că măsura arcului mic  $\widehat{AB}$  este egală cu  $37^\circ$  și scriem  $\widehat{AB} = 37^\circ$ .

Conform definiției, arcul mare  $\widehat{AMB}$  are ca măsură  $360^\circ - 37^\circ = 323^\circ$  și scriem  $\widehat{AMB} = 323^\circ$ .

Dacă extremitățile unui arc sunt puncte diametral opuse, arcul de cerc se numește **semicerc**.

Orice diametru determină două semicercuri.

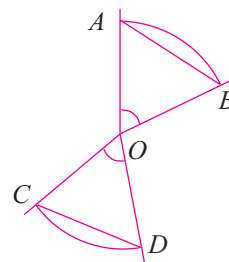
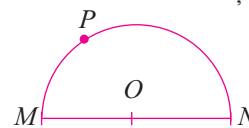
Măsura unui semicerc este  $180^\circ$  și măsura unui cerc este  $360^\circ$ .

În figura alăturată, măsura semicercului  $\widehat{MPN}$  este egală cu  $180^\circ$  și scriem  $\widehat{MPN} = 180^\circ$ .

- Două arce ale aceluiași cerc se numesc **arce congruente** dacă au aceeași măsură.

În figura alăturată, arcul  $\widehat{AB}$  are aceeași măsură cu arcul  $\widehat{CD}$  pentru că unghiurile la centru  $AOB$  și  $COD$  au aceeași măsură.

Spunem despre arcele  $\widehat{AB}$  și  $\widehat{CD}$  că sunt congruente și notăm  $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ .



\* TESTUL 1 \*

Se acordă 1 punct din oficiu.

Timp de lucru: 50 de minute.

- (0,8p) **1.** Enumerați elementele mulțimii  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \in \mathcal{D}_{14}\}$ .
- (0,8p) **2.** Scrieți divizorii numărului 18.
- (0,8p) **3.** Din 30 kg de portocale se obțin 18 ℓ suc. Aflați câți litri de suc se obțin din 20 kg de portocale.
- (0,8p) **4.** Verificați proprietatea  $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$ , pentru  $a = 24$  și  $b = 36$ , unde  $(a, b)$  înseamnă c.m.m.d.c. al numerelor  $a$  și  $b$ , iar  $[a, b]$  înseamnă c.m.m.m.c. al numerelor  $a$  și  $b$ .
- (0,8p) **5.** Se consideră două drepte  $AB$  și  $CD$  concurente în punctul  $O$ . Dacă  $\sphericalangle AOC = 70^\circ$ , calculați  $\sphericalangle BOD$ .
- (0,8p) **6.** Măsura arcului  $\widehat{AB}$  reprezintă 40% din măsura cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ . Determinați măsura unghiului la centru  $AOB$ .
- (0,7p) **7.** Determinați  $x$ , astfel încât dreptele  $a$  și  $b$  din figura de mai jos să fie paralele.



- (0,7p) **8.** Cel mai mare divizor comun a două numere este 15. Aflați numerele, știind că produsul lor este 3150.
- (0,7p) **9.** Raportul măsurilor a două dintre unghiurile formate de două drepte concurente este egal cu  $\frac{2}{3}$ . Aflați măsurile unghiurilor.
- (0,7p) **10.** Se dau mulțimile  $A = \{a, b, c\}$  și  $B = \{b, d\}$ . Calculați  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  și  $A \setminus B$ .
- (1,4p) **11.** Bisectoarele unghiurilor adiacente  $AOB$  și  $BOC$  formează un unghi cu măsura de  $60^\circ$ . Știind că raportul măsurilor celor două unghiuri este  $\frac{2}{3}$ , calculați:
- măsura unghiului  $AOC$ ;
  - măsura unghiului format de bisectoarea unghiului  $AOB$  și semidreapta opusă semidreptei  $OB$ ;
  - măsura unghiului format de bisectoarea unghiului  $BOC$  și semidreapta opusă semidreptei  $OA$ .

1. Determinați toate șirurile de rapoarte egale de forma  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_5}{a_6} = \frac{a_7}{a_8}$  care îndeplinesc simultan condițiile:

- mulțimea  $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$  este mulțimea divizorilor pozitivi ai lui 24;
- valoarea comună a rapoartelor este număr natural.

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa națională, Slobozia, 2023*

2. Unghiurile  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  și  $DOA$  sunt unghiuri în jurul punctului  $O$ . Semidreapta  $OM$  este bisectoarea unghiului  $AOB$  și semidreapta  $ON$  este bisectoarea unghiului  $COD$ .

a) Dacă  $\sphericalangle MON = 170^\circ$ ,  $\sphericalangle BOC = 140^\circ$ , iar punctele  $A$  și  $D$  sunt interioare unghiului  $MON$ , calculează măsura unghiului  $AOD$ .

- b) Dacă  $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle AOD$ , arată că semidreptele  $OM$  și  $ON$  sunt semidrepte opuse.

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Bacău, 2024*

3. Fie  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ , pentru care este adevărată egalitatea:  $\frac{m+2n}{m+2n+25} = \frac{n+2p}{n+2p+39} = \frac{p+2m}{p+2m+29}$ . Să se arate că are loc relația:  $\frac{2m+n}{2m+n+23} = \frac{2n+p}{2n+p+33} = \frac{2p+m}{2p+m+37}$ .

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Bacău, 2024*

4. Determinați numerele naturale  $x, y, z$ , pentru care are loc relația:  $2^x - 2^y - 2^z = 1023$ .

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa județeană, 2024*

5. a) Arătați că numerele  $12n + 13$  și  $13n + 14$  sunt prime între ele pentru orice număr natural  $n$ .

- b) Determinați numărul perechilor  $(a, b)$  de numere naturale, pentru care există un număr natural  $n$ , astfel încât  $\frac{a}{b} = \frac{12n+13}{13n+14}$  și  $17a + 19b < 2024$ .

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa județeană, 2024*

6. Câte numere naturale  $n$  au proprietatea că  $P(n) = S(n) = 8$ , unde  $P(n)$  și  $S(n)$  reprezintă produsul, respectiv suma cifrelor numărului  $n$  (scris în baza 10)? Justificați răspunsul.

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa națională, 2022*

7. Pentru orice două numere naturale  $m$  și  $n$ , notăm  $A(m, n) = m^2 + n^2 + 2mn$  (de exemplu,  $A(3, 4) = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$ ).

- a) Arătați că  $A(1, 2) + A(2, 4)$  este divizibil cu 9.

- b) Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale numerelor  $A(3, 6)$  și  $A(4, 8)$ .

- c) Notăm cu  $M = \{n \in \mathbb{N}^* \mid A(n, n) \leq 2020\}$  și cu  $S$  suma elementelor lui  $M$ . Calculați numărul de divizori ai lui  $S$ .

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Vâlcea, 2020*

8. În jurul punctului  $O$  considerăm  $\sphericalangle A_0OA_1$ ,  $\sphericalangle A_1OA_2$ ,  $\sphericalangle A_2OA_3$ , ...,  $\sphericalangle A_{n-1}OA_n$ ,  $\sphericalangle A_nOA_0$ , astfel încât  $\sphericalangle A_{n-1}OA_n = n^2$  grade și  $\sphericalangle A_nOA_0 = a$  grade.

- a) Calculați  $\sphericalangle A_0AA_3$ .

- b) Determinați valoarea maximă a lui  $n$  și  $\sphericalangle A_nOA_0$  (pentru  $n$  maxim).

- c) Arătați că există cel puțin două semidrepte  $OA_x$  și  $OA_y$ , astfel încât  $OA_x \perp OA_y$ .

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Vâlcea, 2020*

# Indicații și răspunsuri



SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:

(Scațați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

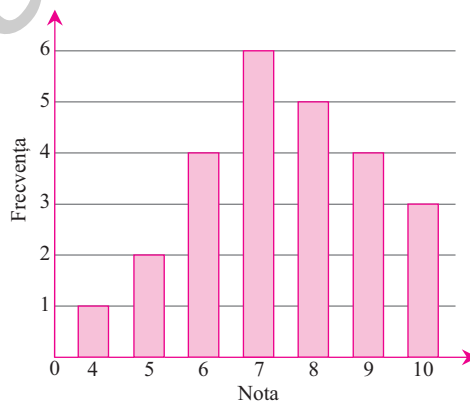
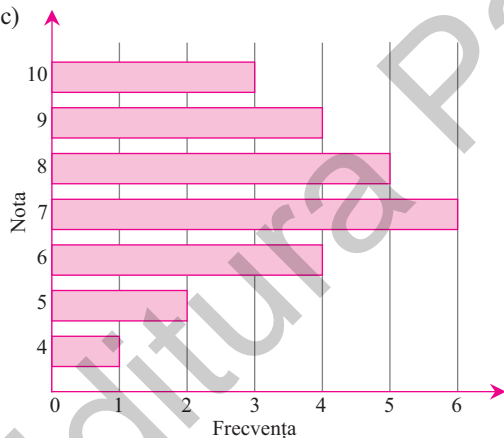
## RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

### 1. Exerciții și probleme recapitulative

1. a) 1; b) 128; c) 2; d) 160. 2. a)  $x = n \cdot (n + 1)$  și produsul a două numere consecutive nu este pătrat perfect; b)  $y = n^2$ , deci  $y$  este pătrat perfect; c)  $z = 100^2$ , deci este pătrat perfect; d)  $t = 2025^2$ , deci  $t$  este pătrat perfect. 3. a) 1; b) 0; c) 6; d) 8. 4. 4,25; 3,(6); 2,8(6); 0,2(15); b)  $\frac{29}{15}$ ;  $\frac{37}{12}$ ;  $\frac{132}{25}$ ;  $\frac{61}{495}$ .

5. a) 5; 11; 17; 23; 29; b) 101 și 0; c) Folosind teorema împărțirii cu rest, dacă ar exista un astfel de număr, am obține că restul împărțirii aceluși număr la 6 ar fi 4, respectiv 2, ceea ce este absurd (imposibil). Deci nu există un astfel de număr; d) 2, 7, respectiv 9. 6. a) 3; b) 1; c) 0,75; d) 470; e) 31,21; f) 1. 7. a) 11101<sub>(2)</sub>; 11111<sub>(2)</sub>; 10000111<sub>(2)</sub>; b) 13<sub>(10)</sub>; 23<sub>(10)</sub>; 93<sub>(10)</sub>; 229<sub>(10)</sub>. 8. (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0). 9. 71 și 23. 10. 10 și 8,4. 11. 15 apartamente cu 2 camere și 5 apartamente cu 3 camere. 12. 500. 13. 8 ore. 14. 37,50 lei, respectiv 7,5 lei. 15. a) 12; b) 6; c) 10. 16. 24 m. 17. 480 cm<sup>3</sup>. 18. a) 143080; 143070; b) 143100; 143000; c) 150000; 140000. 19. a) 814500; b) 815000; 810000. 20. a) 41°41'; b) 50°7'; c) 105°55'; d) 12°9'; e) 61°17'; f) 49°45'; g) 78°59'; h) 13°18'; i) 69°9'. 21. a) 7 și 23; 11 și 19; 13 și 17; b) 43 și 23; 37 și 17; 31 și 11; 23 și 3; c)  $a = 2$ ,  $b = 3$ . 22. a) 450; b) 180. 23. a) MMXXIV, MCMXVII, MMCXXXVII; b) 124; 1249; 1750. 24. a) 5; b) 5. 25. a) 4%; 8%; 16%; 24%; 20%; 16%; 12%; b) 7,44;

c)



26. a) 110°; b) 123°23'. 27. a) 6; b) 100; c) 4; d) 100. 28. a) Nu este posibil, deoarece suma de  $315 - (5 \cdot 10) = 265$  ar trebui să fie în bancnote de 10 lei, ceea ce este imposibil; b) 27 și 33,(3)%. 29. a) 108°; b)  $\sphericalangle YOM = 72^\circ$  și  $\sphericalangle XOY + \sphericalangle YOM = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$ , deci  $X$ ,  $O$  și  $M$  sunt puncte coliniare; c)  $\sphericalangle XOM = \sphericalangle XOY - \sphericalangle YOM = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ = \sphericalangle MOY$ . 30. a)  $\sphericalangle COD = \sphericalangle AOB - (\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOD) = 90^\circ - (20^\circ 15' + 29^\circ 45') = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ; b)  $\sphericalangle DOM = 15^\circ 15'$  și  $\sphericalangle COM = 24^\circ 45'$ ; c)  $\sphericalangle AON = 40^\circ 15'$  și  $\sphericalangle BON = 49^\circ 45'$ .

### 2. Recapitulare și sistematizare prin teste

Testul 1. I. 1. 115. 2. 57. 3. 20 de lei. 4. 70 m. II. 1. B. 2. B. 3. C. 4. C. III. 1. → e); 2. → d); 3. → a); 4. → b). IV. 1. Din  $a = b \cdot 2 + 7$ , rezultă că  $a - 2b = 7 \mid \cdot 4 \Rightarrow 4a - 8b = 28 \mid - 1 \Rightarrow 4a - 8b - 1 =$

$= 27 = 3^3$ , adică  $4a - 8b - 1$  este cubul numărului natural 3. 2. 10. 3. 710 și 765.

**Testul 2. I. 1.** 43600. 2. 1964. 3. 306. 4. 23. **II. 1.** C. 2. B. 3. C. 4. B. **III. 1.** → c); 2. → a); 3. → b);

4. → e). **IV. 1.** a)  $\frac{6}{5}$ ;  $\frac{17}{3}$ ;  $\frac{37}{30}$ ; b) 15; c) 16,97. 2. a) Nu este posibil. Dacă numărul apartamentelor

cu 3 camere ar fi egal cu numărul apartamentelor cu 2 camere, atunci am avea 150 de camere, ceea ce este în contradicție cu enunțul problemei; b) 25 de apartamente cu 2 camere și 35 de apartamente cu 3 camere.

**Testul 3. I. 1.** 3. 2. 17000 m<sup>2</sup>. 3.  $d = 2^{10}$ . 4. 3800 g. **II. 1.** B. 2. D. 3. A. 4. D. **III. 1.** → d); 2. → b);

3. → a); 4. → c). **IV. 1.** a) 150; b) 2700; c) 3210 păsări. 2. a) 7 cm; b)  $(p - n)$  cm; c)  $\frac{p+n}{2}$  cm.

## ALGEBRĂ

### CAPITOLUL MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

#### Unitatea: Mulțimi

#### 1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime. Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice

1. a)  $M = \{b, i, l, o, t, e, c, \tilde{a}\}$ ; b)  $N = \{c, i, n, e, m, a, t, \tilde{a}\}$ ; c)  $P = \{a, c, t, u, l, i, \tilde{a}, \tilde{f}\}$ . 2. a)  $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ,  $D = \{0, 2, 3, 4, 5\}$ . 3. a)  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; b)  $N = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ . 4. a)  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ; b)  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ . 5. Sunt false a), b), c), restul sunt adevărate. 6.  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 6\}$ ; b)  $B = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$ ;  $C = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$ ;

$D = \{3^x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 5\}$ . 7. a) A; b) A; c) A; d) F; e) A; f) A. 8. Sunt false a), d), e) și restul sunt

adevărate. 9.  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $C = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . 10.  $B = \{2^0 + 0,$

$2^1 + 1, 2^3 + 3\} = \{1, 3, 11\}$  și  $\text{card } B = 3$ . 11. a) A; b) A; c) A. 12.  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{1, 2, 4, 8\}$ ,

$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $D = \{1, 2, 3, 4\}$ . 13.  $\text{card } A = 2025$ ,  $\text{card } B = 1957$ ,  $\text{card } C = 7$ ,  $\text{card } D = 4$ ,  $\text{card } E = 9$ ,

$\text{card } F = 2024$ . 14.  $A = \{0, 3\}$ ,  $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ ,  $C = \{3\}$ ,  $D = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ . 15.  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,

$B = \{1, 2\}$ ,  $C = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ ,  $D = \{21, 23, 25, 27, 29\}$ ,  $E = \emptyset$ ,  $F = \{4\}$ . 16. a)  $8^x + 8^{x+1} =$

$= 8^x(1 + 8) = 8^x \cdot 9 = 8^x \cdot 3^2$  este pătrat perfect, dacă  $x$  este număr par, adică  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ ;

b)  $24^x + 24^{x+1} = 24^x(1 + 24) = 24^x \cdot 25 = 24^x \cdot 5^2$  este pătrat perfect dacă  $x$  este număr par, adică  $A =$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2p, p \in \mathbb{N}\}$ . 17.  $A = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ ,  $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ ,  $C = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ . Se

observă că  $A = B = C$ . 18.  $A = \{225, 256, 289\}$ ,  $B = \{100, 121, 144, 169, 196\}$ ;  $C = \{1\}$ . 19.  $A =$

$= \{1, 3\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ . 20. Din a)  $9 \in A$  și din b) rezultă că  $5 \cdot 9 + 1 \in A$ , adică  $46 \in A$ . Din  $46 \in A$  și

din  $46 = 7 \cdot 6 + 4$  rezultă că  $6 \in A$ .

#### 2. Relații între mulțimi. Submulțimi

Matematică. Clasa a VI-a

1. a)  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ ; b)  $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}$ ; c)  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\},$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ . 3.  $\{1, 3\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 3, 5\}; \{1, 3, 7\}; \{1, 2, 3, 5\}; \{1, 2, 3, 7\};$

$\{1, 3, 5, 7\}$ . 4.  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x = 7\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3 \text{ și } x > 5\}$ ;  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 0\}$ . 5. a)  $A =$

$= \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ; b)  $A \not\subset B$  și  $B \not\subset A$ . 6.  $A = B = C$ . 7. a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) A.

8. a)  $\text{card } M = 9$ ; b)  $M_1 = \{11, 21, 31, 41\}$ ,  $M_2 = \{31, 51, 71, 81\}$ ,  $M_3 = \{41, 61, 71, 91\}$ ; c)  $M_1 =$

$= \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81\}$ ,  $M_2 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 91\}$ ,  $M_3 = \{11, 21, 31, 41, 51,$

$61, 81, 91\}$ ,  $M_4 = \{11, 21, 31, 41, 51, 71, 81, 91\}$ ,  $M_5 = \{11, 21, 31, 41, 61, 71, 81, 91\}$ ,  $M_6 = \{11,$

$21, 31, 51, 61, 71, 81, 91\}$ ,  $M_7 = \{11, 21, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$ ,  $M_8 = \{11, 31, 41, 51, 61, 71, 81,$

$91\}$ ,  $M_9 = \{21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$ . 9. a)  $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{7\}, \{0, 1\}, \{0, 7\}, \{1, 7\}, \{0, 1, 7\}$ ; b)  $\emptyset,$

$\{2, 4, 6\}, \{0, 2, 4, 8\}$  (puteți scrie oricare trei submulțimi); c)  $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 7\}$ ,  $B = \{0, 2, 4, 6, 8,$

$15\}$ ,  $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 15, 23\}$ . 11. a)  $x \in \{2, 4\}$ ; b)  $x \in \{1, 5\}$ ; c)  $x \in \{6, 7\}$ . 12. a) „ $\subseteq$ ”; b) „ $\not\subset$ ”;



**Testul 2. I. 1.**  $\frac{1}{5}$  și  $\frac{1}{2}$ . **2.**  $\frac{1}{3}$  și  $\frac{1}{7}$ . **3.** Se mărește de 3 ori. **4.** 3 ori mai mare. **II. 1. A. 2. C. 3. B. 4. D.**

**III. 1.** → d); **2.** → b); **3.** → c); **4.** → a). **IV. a)**  $100\% - (25\% + 12,5\% + 18,75\% + 6,25\%) = 37,5\%$ ;  
**b)** Folosim regula de trei simplă:

$$\begin{array}{l} 2 \text{ elevi} \xrightarrow{\text{d. p.}} \dots \dots \dots 6,25\% \\ x \text{ elevi} \xrightarrow{\dots \dots \dots} \dots \dots \dots 100\% \end{array} \text{ și } x = \frac{2 \cdot 100}{6,25} = 32.$$

Deci în clasă erau 32 de elevi; **c)** Folosim regula de trei simplă și calculăm măsurile arcelor:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \xrightarrow{\text{d. p.}} \dots \dots \dots 100\% \\ \widehat{AB} \xrightarrow{\dots \dots \dots} \dots \dots \dots 25\% \end{array} \text{ și } \widehat{AB} = \frac{360^\circ \cdot 25}{100} = 90^\circ.$$

$$\begin{array}{l} 360^\circ \xrightarrow{\text{d. p.}} \dots \dots \dots 100\% \\ \widehat{BC} \xrightarrow{\dots \dots \dots} \dots \dots \dots 12,5\% \end{array} \text{ și } \widehat{BC} = \frac{360^\circ \cdot 12,5}{100} = 45^\circ.$$

$$\begin{array}{l} 360^\circ \xrightarrow{\text{d. p.}} \dots \dots \dots 100\% \\ \widehat{CD} \xrightarrow{\dots \dots \dots} \dots \dots \dots 18,75\% \end{array} \text{ și } \widehat{CD} = \frac{360^\circ \cdot 18,75}{100} = 67,5^\circ.$$

$$\begin{array}{l} 360^\circ \xrightarrow{\text{d. p.}} \dots \dots \dots 100\% \\ \widehat{DE} \xrightarrow{\dots \dots \dots} \dots \dots \dots 6,25\% \end{array} \text{ și } \widehat{DE} = \frac{360^\circ \cdot 6,25}{100} = 22,5^\circ.$$

Măsura arcului  $\widehat{AE}$  se poate calcula fie cu regula de trei simplă, fie:  $\widehat{AE} = 360^\circ - (90^\circ + 45^\circ + 67,5^\circ + 22,5^\circ) = 135^\circ$ .

**Testul 3. I. 1.**  $36^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $90^\circ$ . **2.**  $112,5^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $22,5^\circ$ . **3.** invers. **4.** direct. **II. 1. A. 2. D. 3. B. 4. C.**

**III. 1.** → a); **2.** → b); **3.** → c); **4.** → e). **IV. a)** 58; **b)** marți; **c)** 25%.

## GEOMETRIE

### CAPITOLUL NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

#### Unitatea: Unghiul

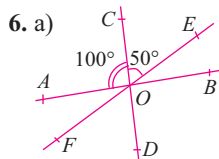
##### 1. Recapitulare și completări

**1. b)**  $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 60^\circ$ ; **c)**  $AM = 3 \text{ cm} = AB : 2$ . **2. b)**  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DCA$ ; **c)**  $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle CBA$ . **3.** Nule:  $\sphericalangle H$ ; alungite:  $\sphericalangle F$ ; ascuțite:  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle C$ ; drepte:  $\sphericalangle E$ ,  $\sphericalangle G$ ; obtuze:  $\sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle D$ . **4. a)** ascuțit; **b)** obtuz. **5. a)**  $\sphericalangle EOM = 60^\circ$ ; **b)**  $\sphericalangle EOM = 140^\circ$ . **6. b)**  $\sphericalangle AOC = 120^\circ$ . **7.**  $\sphericalangle AOC = 60^\circ$ . **8.**  $\sphericalangle AOC = 30^\circ$ , dacă  $OC$  este interioară  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle AOC = 180^\circ$ , dacă  $OB$  este interioară  $\sphericalangle AOC$ . **9. b)**  $\sphericalangle AMC$  este unghi obtuz; **d)**  $\sphericalangle EMC = 30^\circ$  sau  $\sphericalangle EMC = 150^\circ$ . **10. c)**  $\sphericalangle BOC = 20\% \cdot \sphericalangle AOB = 20\% \cdot 150^\circ = 30^\circ$  și  $\sphericalangle AOC = 180^\circ$ , adică  $OA$  și  $OC$  sunt semidrepte opuse și punctele  $A$ ,  $O$ ,  $C$  sunt coliniare. **11.**  $\sphericalangle BAO = 45^\circ$ . **12. b)**  $180^\circ$ . **13. a)**  $420'$ ; **b)**  $1020'$ ; **c)**  $323'$ ; **d)**  $1185'$ . **14. a)**  $11^\circ 40'$ ; **b)**  $25^\circ$ ; **c)**  $54^\circ 35'$ ; **d)**  $90^\circ 6'$ . **15. a)**  $155^\circ$ ; **b)**  $113^\circ$ ; **c)**  $161^\circ$ ; **d)**  $45^\circ$ ; **e)**  $71^\circ$ ; **f)**  $109^\circ 27'$ ; **g)**  $26^\circ 7'$ ; **h)**  $29^\circ 27'$ ; **i)**  $55^\circ 53'$ ; **j)**  $77^\circ 22'$ ; **k)**  $67^\circ 23'$ ; **l)**  $75^\circ 48'$ . **16. a)**  $9^\circ 12'$ ; **b)**  $15^\circ 24'$ ; **c)**  $30^\circ 30'$ ; **d)**  $47^\circ 15'$ . **17. a)**  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle BOC$ ,  $\sphericalangle COD$ ,  $\sphericalangle DOE$ ; **b)**  $\sphericalangle AOC$ ,  $\sphericalangle COE$ ,  $\sphericalangle BOD$ ; **c)**  $\sphericalangle AOD$ ,  $\sphericalangle BOE$ . **18. a)**  $35^\circ$ ; **b)**  $71^\circ$ ; **c)**  $75^\circ$ ; **d)**  $73^\circ$ . **19. a)**  $9^\circ$ ; **b)**  $\sphericalangle AOC = 27^\circ$ ,  $\sphericalangle BOD = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle AOD = 54^\circ$ . **20. a)**  $41^\circ$  și  $123^\circ$ ; **b)**  $82^\circ$ .

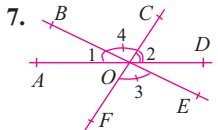
##### 2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf

**1. a)** Se desenează dreptele concurente  $MN$  și  $PQ$ , măsurând cu raportorul unghiul  $\sphericalangle MOP = 60^\circ$ ; **b)**  $\sphericalangle MOQ = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle NOQ = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle PON = 120^\circ$ ; **c)**  $\sphericalangle MOP$  și  $\sphericalangle NOQ$ , respectiv  $\sphericalangle MOQ$  și  $\sphericalangle NOP$ . **2.** nu sunt opuse la vârf; nu au. **3.**  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ . **4. a)** semidrepte opuse; **b)** nu sunt; **c)** nu sunt opuse; **au;** semidrepte opuse. **5.**  $\sphericalangle 1$  cu  $\sphericalangle 3$ ;  $\sphericalangle 2$  cu  $\sphericalangle 4$ ;  $\sphericalangle 6$  cu  $\sphericalangle 8$ ;  $\sphericalangle 5$  cu  $\sphericalangle 7$ ;  $\sphericalangle 9$  cu  $\sphericalangle 11$  și  $\sphericalangle 10$  cu  $\sphericalangle 12$ .





b)  $\sphericalangle AOC$  cu  $\sphericalangle BOD$ ,  $\sphericalangle AOE$  cu  $\sphericalangle BOF$ ,  $\sphericalangle AOF$  cu  $\sphericalangle BOE$ ,  $\sphericalangle AOD$  cu  $\sphericalangle BOC$ ,  $\sphericalangle COE$  cu  $\sphericalangle DOF$ ,  $\sphericalangle COF$  cu  $\sphericalangle DOE$ ; c)  $\sphericalangle BOC = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle BOE = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle BOD = 100^\circ$ ,  $\sphericalangle DOF = 50^\circ$ ,  $\sphericalangle FOA = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle DOA = 80^\circ$ .



a)  $\sphericalangle AOB$  cu  $\sphericalangle DOE$ ,  $\sphericalangle AOC$  cu  $\sphericalangle DOF$ ,  $\sphericalangle BOC$  cu  $\sphericalangle EOF$ ,  $\sphericalangle BOD$  cu  $\sphericalangle EOA$ ,  $\sphericalangle COD$  cu  $\sphericalangle FOA$ ,  $\sphericalangle COE$  cu  $\sphericalangle FOB$ ; b)  $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 4$  (unghiuri opuse la vârf). Cum  $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 2 = 180^\circ$  (formează un unghi alungit) rezultă că  $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180^\circ$ .

8. a)  $20^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $160^\circ$ ; b)  $110^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $70^\circ$ ; c)  $75^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $105^\circ$ ; d)  $90^\circ$  fiecare. 9. a)  $\sphericalangle MOS = 180^\circ - (75^\circ + x^\circ + 45^\circ - x^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ; b) Din  $3(45^\circ - x^\circ) = 75^\circ + x^\circ \Rightarrow 135^\circ - 3x^\circ = 75^\circ + x^\circ \Rightarrow 60^\circ = 4x^\circ \Rightarrow x^\circ = 15^\circ$  și  $\sphericalangle NOR = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle NOQ = 30^\circ$ , iar  $\sphericalangle QOS = 90^\circ$ . 10. Construiește semidreapta opusă semidreptei  $OA$  și notează-o  $OA'$  și semidreapta opusă semidreptei  $OB$  și notează-o cu  $OB'$ , apoi măsoară unghiul  $\sphericalangle A'OB'$  care este opus la vârf cu unghiul  $\sphericalangle AOB$  și, ca urmare, sunt congruente.

11. Notăm  $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = x^\circ$  (unghiuri opuse la vârf),  $\sphericalangle DOF = 2x^\circ$  și  $\sphericalangle EOC = x^\circ + 40^\circ$ . Dar  $\sphericalangle DOF \equiv \sphericalangle EOC$  (opuse la vârf), adică  $2x^\circ = x^\circ + 40^\circ$  și  $x^\circ = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle BOD = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle DOF = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle AOF = \sphericalangle AOB - (\sphericalangle BOD + \sphericalangle DOF) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ . 12. a)  $\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOC = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COB = 150^\circ$ ; b) Din  $x^\circ + 90^\circ + x^\circ = 180^\circ \Rightarrow x^\circ = 45^\circ$ ;  $\sphericalangle BOD = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COB = 135^\circ$ ; c)  $2x^\circ + 6x^\circ - 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow x^\circ = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 60^\circ$  și  $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COB = 120^\circ$ ; d)  $\frac{x^\circ}{4} + 2x^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x^\circ = 80^\circ$  și  $\sphericalangle COB = \sphericalangle AOD = 20^\circ$ , iar  $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 160^\circ$ . 13. a)  $54^\circ$  și  $126^\circ$ ; b)  $28^\circ$  și  $152^\circ$ .

14. Unghiurile  $\sphericalangle MOP$  și  $\sphericalangle NOQ$  sunt unghiuri opuse la vârf, deci sunt congruente. Avem  $75^\circ - x^\circ = x^\circ + 15^\circ \Rightarrow x^\circ = 30^\circ$  și  $\sphericalangle MOQ = 135^\circ$ ,  $\sphericalangle MOP = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle NOQ = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle PON = 135^\circ$ . 15.  $\sphericalangle AOB = 180^\circ - (\alpha^\circ + \beta^\circ)$ ,  $\sphericalangle AOD = \alpha^\circ + \beta^\circ$ ,  $\sphericalangle COD = 180^\circ - \beta^\circ$ . 16. a)  $110^\circ$ ; b)  $75^\circ$ . 17. a)  $62^\circ$ ,  $62^\circ$ ,  $118^\circ$ ,  $118^\circ$ ; b)  $56^\circ$ ,  $56^\circ$ ,  $124^\circ$ ,  $124^\circ$ . 18. a) Din  $\sphericalangle BOC$  și  $\sphericalangle AOD$  opuse la vârf, rezultă că  $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC = x$ . Din  $\sphericalangle AOC = 8x$ ,  $\sphericalangle BOC = x$  și  $\sphericalangle AOB = 180^\circ$  rezultă că  $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOB$ , adică  $8x + x = 180^\circ$  și  $x = 20^\circ$ , respectiv  $\sphericalangle BOE = 5x = 100^\circ$ ; b)  $\sphericalangle AOC = 8x = 160^\circ$ ; c)  $\sphericalangle DOE = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOD - \sphericalangle EOB$ , adică  $\sphericalangle DOE = 180^\circ - 20^\circ - 100^\circ = 60^\circ$ . 19. b)  $\sphericalangle AOE = 75^\circ$ ,  $\sphericalangle COE = 15^\circ$ ; c)  $\sphericalangle BOF = \sphericalangle AOE = 75^\circ$  (ca unghiuri opuse la vârf) și  $\sphericalangle AOF = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOF = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$ .

20. a) Calculăm  $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC = 180^\circ - \sphericalangle AOC$  și  $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB - \sphericalangle BOD$ . Cum  $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$ , rezultă că  $\sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB - \sphericalangle BOD$ , adică  $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD$ ; b) Calculăm  $\sphericalangle COD = \sphericalangle COB + \sphericalangle BOD = \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOD = 180^\circ$ , adică  $\sphericalangle COD$  este unghi alungit și punctele  $C$ ,  $O$ ,  $D$  sunt coliniare; c)  $\sphericalangle AOC$  și  $\sphericalangle BOD$  sunt unghiuri opuse la vârf, deoarece semidreptele  $OA$  și  $OB$ , respectiv  $OC$  și  $OD$  sunt perechi de semidrepte opuse.

### 3. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct

1. a)  $360^\circ$ ; b) unghiuri în jurul unui punct; c) fiecare are  $72^\circ$ . 2.  $\sphericalangle POM = 100^\circ$ . 3. a)  $\sphericalangle AOC$ ,  $\sphericalangle COB$ ,  $\sphericalangle BOD$  și  $\sphericalangle DOA$ ; b)  $\sphericalangle AOD$  cu  $\sphericalangle BOC$  și  $\sphericalangle AOC$  cu  $\sphericalangle BOD$ ; c)  $\sphericalangle AOD = 45^\circ$  și  $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 135^\circ$ .

4. a) Din faptul că suma măsurilor unghiurilor este egală cu  $360^\circ$  rezultă că  $x^\circ = 30^\circ$  și unghiurile au măsurile de:  $50^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $110^\circ$ ; b) Se realizează desenul măsurând unghiurile; c) Da, doar unghiul de  $110^\circ$  este obtuz. 5.  $70^\circ$  și  $110^\circ$ . 6. a) Suma celor 4 unghiuri este  $180^\circ$  (jumătate din  $360^\circ$ ), adică  $x^\circ + (x^\circ - 20^\circ) + (x^\circ + 20^\circ) + 3x^\circ = 180^\circ$ . Rezolvând, se obține  $x^\circ = 30^\circ$  și măsurile unghiurilor sunt:  $30^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $90^\circ$ ; b) Se realizează desenul măsurând unghiurile; c) Da, există cele două unghiuri opuse la vârf, cu măsura de  $90^\circ$  fiecare. 7. Dacă notăm cu  $x^\circ$  și  $y^\circ$  măsurile a două dintre unghiurile care nu au puncte interioare comune, avem:  $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$  și  $2x^\circ + y^\circ = 240^\circ$ . Scăzând cele două relații se obține  $x^\circ = 60^\circ$ , iar măsurile unghiurilor formate în jurul punctului  $O$  sunt:  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ . 8. a)  $180^\circ$ , respectiv  $6^\circ$ ; b)  $30^\circ$ , respectiv  $0,5^\circ = 30'$ . 9. Fie  $x^\circ - 2^\circ$ ,  $x^\circ - 1^\circ$ ,  $x^\circ$ ,

## Cuprins

### Recapitulare și evaluare inițială

1. Exerciții și probleme recapitulative.....	5
2. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	8
<i>Test de autoevaluare</i> .....	11

## ALGEBRĂ

### Capitolul: Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

#### Unitatea: Mulțimi

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime. Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice .....	15
2. Relații între mulțimi. Submulțimi .....	18
3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite.....	20
4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.....	22
5. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	28
<i>Test de autoevaluare</i> .....	31

#### Unitatea: Divizibilitatea numerelor naturale

1. Divizibilitatea numerelor naturale. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime.....	34
2. Determinarea celui mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale. Numere prime între ele.....	40
3. Determinarea celui mai mic multiplu comun a două sau mai multor numere naturale.....	43
4. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale .....	46
5. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea.....	50
6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	53
7. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	54
<i>Test de autoevaluare</i> .....	57

### Capitolul: Rapoarte și proporții

#### Unitatea: Rapoarte și proporții

1. Rapoarte .....	62
2. Procente.....	68
3. Proporții.....	72
4. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	79
5. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	81
<i>Test de autoevaluare</i> .....	85

#### Unitatea: Proporționalitate și elemente de organizare a datelor

1. Mărimi direct proporționale .....	88
2. Mărimi invers proporționale.....	92
3. Regula de trei simplă.....	96
4. Elemente de organizare a datelor .....	100
5. Probabilități (Aplicație la rapoarte).....	110
6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	114

7. Recapitulare și sistematizare prin teste.....	115
<i>Test de autoevaluare</i> .....	119
<b>AUTOEVALUARE</b> .....	122
<b>GEOMETRIE</b>	
<b>Capitolul; Noțiuni geometrice fundamentale</b>	
<b>Unitatea: Unghiul</b>	
1. Recapitulare și completări .....	125
2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf.....	129
3. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct.....	132
4. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare .....	135
5. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi .....	138
6. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	142
<i>Test de autoevaluare</i> .....	145
<b>Unitatea: Paralelism</b>	
1. Drepte paralele: definiție, notație, construcție intuitivă prin translație. Axioma paralelelor.....	148
2. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă.....	151
3. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice.....	157
4. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	162
<i>Test de autoevaluare</i> .....	165
<b>Unitatea: Perpendicularitate</b>	
1. Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție). Oblice.....	168
2. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice.....	172
3. Distanța de la un punct la o dreaptă .....	174
4. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă .....	176
5. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	181
<i>Test de autoevaluare</i> .....	185
<b>Unitatea: Cercul</b>	
1. Cerc. Elemente în cerc: centru, coardă, diametru, arc de cerc.....	188
2. Unghi la centru. Măsuri.....	191
3. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri ..	193
4. Recapitulare și sistematizare prin teste .....	196
<i>Test de autoevaluare</i> .....	199
<b>AUTOEVALUARE</b> .....	202
<b>Teste recapitulative</b> .....	203
<b>Probleme date la concursuri școlare</b> .....	219
<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....	221