

Anton NEGRILĂ  
Maria NEGRILĂ

**matematică**  
**algebră**  
**geometrie**

**clasa a VII-a**

**partea I**

ediția a XIII-a, revizuită



**mate 2000 – consolidare**

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.*

*Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.*

**Referință științifică:** Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Roxana Pietreanu, Andreea Roșca

Tehnoredactare: Adriana Vlădescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**NEGRILĂ, ANTON**

**Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Anton Negrilă,**

Maria Negrilă. – Ed. a 13-a, reviz. – Pitești : Paralela 45, 2024 –

vol.

ISBN 978-973-47-4092-5

**Partea 1.** – 2024. – ISBN 978-973-47-4093-2

I. Negrilă, Maria

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2024

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

**Stimate cadre didactice/dragi elevi,**

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

**Mate 2000+** este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebită plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

**Rolul aplicației MATE 2000+** este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!  
Echipa Editurii Paralela 45

### Abrevieri:

- \* Inițiere (înțelegere)
- \*\* Consolidare (aplicare și exersare)
- \*\*\* Excelență (aprofundare și performanță)
- \*\*\*\* Supermate

#### Legendă

**PE** = portofoliul elevului

**PP** = portofoliul profesorului

**PE-PP** = portofoliul elevului - portofoliul profesorului

# Recapitulare și evaluare inițială

**PE** Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

## ALGEBRĂ

### ☀ TESTUL 1 ☀

1. a) Se consideră numerele:

$$a = (-4) \cdot (+6) - [(-24) : (+3) - (-28) : (-7) - (+16) : (-8)] \text{ și}$$
$$b = [(-6) \cdot (+2) - (-5) \cdot (+3) - (-7) \cdot (-3)] : (-12 + 15).$$

Calculați  $n = a - b$ .

b) Se consideră numerele:

$$x = (-3) \cdot (+7) - [(-18) : (+3) - (+24) : (-6) + (-32) : (-4)] \cdot (-11 + 9) \text{ și}$$
$$y = [(-7) \cdot (+4) - (-8) \cdot (+3) - (-6) \cdot (-2)] : (-6 + 8).$$

Calculați  $n = x + y$ .

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a)  $27 - 3(2x - 3) = 18$ ;      b)  $2(3x + 4) - 15 = 11$ ;  
c)  $2(5x - 13) + 33 = 3(2x + 1) + 20$ ;      d)  $3x + 5 - 2(x + 2) = 8 + 3(x - 1)$ .

3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a)  $11 - 2(3x - 4) > 1$ ;      b)  $2(2x + 1) + 13 \leq 3(x - 1) + 22$ ;  
c)  $17x + 19 \leq 6(2x + 5) + 2(x - 5) + 11$ .

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a)  $|x + 3| \leq 2$ ;      b)  $|2x + 5| < 9$ ;      c)  $2[3 \cdot |2x - 7| - 7] - 23 < 17$ .

5. Determinați valorile întregi ale lui  $n$ , pentru care:

a)  $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{Z}$ ;      b)  $\frac{3n+14}{n+2} \in \mathbb{Z}$ ;      c)  $\frac{4n+7}{2n-1} \in \mathbb{Z}$ ;      d)  $\frac{3n+8}{2n+1} \in \mathbb{Z}$ .

6. Calculați:

a)  $\left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \left(+\frac{8}{25}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) \cdot \left(-\frac{15}{16}\right)$ ;      b)  $\left(+\frac{16}{21}\right) \cdot \left(-\frac{35}{32}\right) - \left(-\frac{24}{49}\right) \cdot \left(+\frac{21}{32}\right)$ ;  
c)  $\left(-\frac{5}{18} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right) - \left(-\frac{13}{24} + \frac{7}{18}\right) \cdot \left(-1\frac{5}{22}\right)$ ;  
d)  $\left(-\frac{1}{10} + \frac{2}{15}\right) \cdot \left(-7\frac{1}{2}\right) + (-4) \cdot \left(-\frac{7}{20} + \frac{4}{15}\right)$ .

7. Numerele 377, 517 și 803, împărțite la același număr natural nenul  $n$ , dau câturile nenule și resturile egale cu 17, 13 și, respectiv, 11. Determinați valorile împărțitorului  $n$ .

8. Determinați cel mai mic număr natural  $n$ , care împărțit pe rând la 20, 24 și, respectiv, 28, se obțin câturile nenule, iar resturile egale cu 14, 18 și, respectiv, 22.

# GEOMETRIE

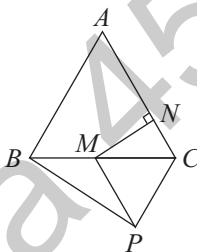
## ✿ TESTUL 1 ✿

1. Se consideră triunghiul isoscel  $ABC$ , cu  $AB \equiv AC$  și  $AM \equiv AN$ , unde  $M \in AB$ , iar  $N \in AC$  și  $BN \cap CM = \{P\}$ . Arătați că:

- a)  $BN \equiv CM$ ;                      b)  $PM \equiv PN$ ;                      c)  $AP \perp BC$ .

2. În figura alăturată, triunghiurile  $ABC$  și  $PMC$  sunt echilaterale, punctul  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ , iar punctul  $N$  este piciorul perpendicularei duse din  $M$  pe latura  $AC$ .

- a) Arătați că dreptele  $AB$  și  $CP$  sunt paralele.  
b) Calculați măsura unghiului  $ABP$ .  
c) Dacă pe semidreapta  $AB$  se ia un punct  $T$  astfel încât punctul  $B$



să fie interior segmentului  $AT$ , iar  $BT = \frac{AB}{2}$ , arătați că punctele  $T, M$

și  $N$  sunt coliniare.

3. Se consideră triunghiul  $ABC$ , iar punctul  $D$  este mijlocul laturii  $BC$ , astfel încât  $AD \equiv BD \equiv CD$ .

- a) Arătați că  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ .                      b) Dacă  $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$ , arătați că  $BC = 2AB$ .

4. Se consideră triunghiul isoscel  $ABC$ ,  $AB \equiv AC$ , în care punctele  $D$  și  $E$  sunt mijloacele laturilor  $AC$  și  $AB$ . Știind că punctul  $M$  este simetricul punctului  $C$  față de  $E$  și  $N$  este simetricul punctului  $B$  față de  $D$ , demonstrați că:

- a)  $BD \equiv CE$ ;                      b)  $AM \equiv AN$ ;  
c) punctele  $M, A, N$  sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul isoscel  $ABC$ ,  $AB \equiv AC$  și  $AM \equiv AN$ , unde  $M \in AB$  și  $N \in AC$ , iar  $BN \cap CM = \{P\}$ . Demonstrați că:

- a)  $BN \equiv CM$ ;                      b)  $\triangle BPC$  este isoscel;  
c) semidreapta  $AP$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ .

## ✿ TESTUL 2 ✿

1. Se consideră triunghiul isoscel  $ABC$ , cu  $N \in AB$  și  $P \in AC$ , astfel încât  $BN \equiv CP$ , iar  $BP \cap CN = \{M\}$ . Arătați că:

- a)  $BP \equiv CN$ ;                      b)  $NP \parallel BC$ ;                      c) Triunghiul  $BMC$  este isoscel.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic  $ABC$ , cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ , iar punctul  $D$  este mijlocul ipotenuzei  $BC$ . Se notează cu  $E$  simetricul punctului  $A$  față de punctul  $D$ . Arătați că:

- a)  $AB \equiv CE$ ;                      b)  $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle BAC$ ;                      c)  $AD = \frac{BC}{2}$ .

3. În triunghiul  $ABC$ ,  $BM$  și  $CN$  sunt înălțimi,  $M \in AC$  și  $N \in AB$ . Pe semidreapta  $MB$  se ia punctul  $P$  astfel încât  $BP \equiv AC$ , punctul  $B$  fiind interior segmentului  $PM$ , iar pe semidreapta  $NC$  se ia punctul  $T$  astfel încât  $CT \equiv AB$ , punctul  $C$  fiind interior segmentului  $NT$ . Arătați că:

- a)  $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle ACT$ ;                      b)  $AP \equiv AT$ ;                      c)  $\sphericalangle PAT = 90^\circ$ .

# Algebră

## Capitolul I Mulțimea numerelor reale

### PP Competențe specifice

- C1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui  $\mathbb{R}$
- C2. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
- C3. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
- C4. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
- C5. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
- C6. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

### Rădăcina pătrată

#### PE-PP 1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect



• Numărul natural  $x$  se numește **pătrat perfect** dacă există numărul întreg  $a$  cu proprietatea că  $x = a^2$ , unde  $a \in \mathbb{Z}$ .

• Numărul  $|a|$  se numește **rădăcina pătrată** a numărului  $x$  și se notează cu  $\sqrt{x}$ .

•  $\sqrt{x^2} = |x|$ , pentru orice număr întreg  $x$ .

**Observații:** Dacă  $x$  este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este  $x$ , și anume  $\sqrt{x}$  și  $-\sqrt{x}$ . Evident că numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă  $a \in \mathbb{Z}$ , atunci  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

a)  $x = a^2$  implică  $\sqrt{x} = \sqrt{a^2} = |a|$ .      b) Dacă  $a \geq 0$ , atunci  $\sqrt{a^2} = a$ .

**Exemple:**  $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = |10| = 10$ ;  $\sqrt{64} = \sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$ ;

$\sqrt{25x^2y^4} = \sqrt{(5xy^2)^2} = |5xy^2| = 5y^2|x|$ .

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

### PE Înțelegere \*

1. Copiați și completați următorul tabel ( $x \in \mathbb{Z}$ ):

$x$	-5	-3	-2	0			9	12
$x^2$					16	36		

2. a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mici decât 90.  
 b) Scrieți toate numerele pătrate perfecte cuprinse între 140 și 290.  
 c) Scrieți pătratele perfecte de trei cifre, mai mari ca 300.
3. Determinați numerele raționale care au pătratul egal cu:  
 a) 25;    b) 64;    c) 121;    d) 729;    e) 1296.
4. Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:  
 a) 36;    b) 64;    c) 1;    d) 169;    e) 324;    f) 529;  
 g)  $2^8 \cdot 81$ ;    h)  $49 \cdot 64 \cdot 5^2$ ;    i)  $4^3 \cdot 5^6$ ;    j)  $16^3 \cdot (-5)^4$ ;    k)  $121 \cdot 169^3$ .
5. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:  
 a) 36; 4; 15; 56; 169; 190; 196; 225; 240; 256;  
 b)  $13^2$ ;  $(-9)^4$ ;  $3^8$ ;  $(-7)^5$ ;  $18^3$ ;  $(-12)^{18}$ ;  $(-21)^7$ ;  $(-28)^6$ ;  
 c)  $5^{8n}$ ;  $7^{6n+4}$ ;  $28^{n^2+1}$ ;  $15^{n^2+n}$ ;  $12^{n^2-n+6}$ ,  $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Fie  $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  și  $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$ .  
 a) Determinați elementele mulțimii  $B$ .  
 b) Determinați elementele mulțimii  $C = \{z \mid z = \sqrt{y}, y \in B\}$ .
7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:  
 a)  $\sqrt{64} = 8$ ;    b)  $\sqrt{(-5)^2} = -5$ ;    c)  $\sqrt{123^2} = 123$ ;  
 d)  $\sqrt{(-432)^2} = 432$ ;    e)  $\sqrt{49a^2} = 7a, a < 0$ ;    f)  $\sqrt{(-25a^2)^2} = 5a^2$ ;  
 g)  $\sqrt{(-64a)^4} = 8a^2$ ;    h)  $\sqrt{81a^8b^2} = 9a^4b, b < 0$ .
8. Rezolvați ecuațiile:  
 a)  $x^2 = 36$ ;    b)  $x^2 = 1600$ ;    c)  $5x^2 = 245$ ;  
 d)  $-2x^2 = -72$ ;    e)  $x^2 + 9 = 265$ ;    f)  $x^2 - 14 = 155$ ;  
 g)  $-3x^2 + 175 = -257$ ;    h)  $-2x^2 + 27 = -101$ ;    i)  $(x-3)^2 = 4$ ;  
 j)  $(x+4)^2 = 9$ ;    k)  $25 - (x+3)^2 = 9$ ;    l)  $-144 - (x-5)^2 = -225$ ;  
 (i) în mulțimea numerelor naturale;  
 (ii) în mulțimea numerelor întregi.
9. Folosind formula  $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ , unde  $a \neq 1$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculați:  
 a)  $\sqrt{x+1}$ , unde  $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{201}$ ;  
 b)  $\sqrt{2x+1}$ , unde  $x = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{249}$ ;  
 c)  $\sqrt{4x+1}$ , unde  $x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{359}$ ;  
 d)  $\sqrt{8x+1}$ , unde  $x = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{98}$ ;





(1p) **2.** Determinați cifrele distincte și nenule  $a, b$ , pentru care  $\sqrt{2,(\overline{a})+4,(\overline{b})}$  este număr rațional.

(1p) **3.** a) Arătați că numărul  $a = 6 \cdot 3^{2n+4} - 12 \cdot 3^{2n+3} - 9 \cdot 3^{2n+2}$  este pătratul unui număr natural, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Arătați că  $\sqrt{a}$  este un număr natural impar, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

(1p) **4.** Determinați cifrele nenule și distincte  $a, b, c$ , cu  $a < b < c$ , pentru care numărul  $x = \sqrt{a,b(\overline{c})+b,c(\overline{a})+c,a(\overline{b})}$  este rațional.

<b>Subiectul</b>	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
<b>Punctajul</b>														
<b>Nota</b>														

## Mulțimea numerelor reale

### PE-PP

**1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări**


- Numerele care au partea zecimală infinită și neperiodică se numesc **numere iraționale**.
- Dacă  $p \in \mathbb{N}^*$  și  $p$  nu este pătrat perfect, atunci  $\sqrt{p}$  este număr irațional.

**Exemple:**  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{2018}$ .

• **Reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale este mulțimea numerelor reale.

• Se notează cu  $\mathbb{R}$  mulțimea numerelor reale și cu  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mulțimea numerelor iraționale.

• Avem șirul de incluziuni:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

•  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ;  $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ;

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ ;  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

• **Modulul** unui număr real  $x$  este:  $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

•  $|x| \geq 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

•  $|x| = |-x|$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Numim **axă** a numerelor reale o dreaptă, cu un punct fixat numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură.

b) Oricărui **număr real** îi corespunde **un singur punct** pe axa numerelor și, reciproc, oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un singur număr real.

c) **Exercițiu:** Vom arăta că numărul  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Demonstrație.* Presupunem că  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Atunci există  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , unde  $m, n \in \mathbb{Z}^*$  și  $(m, n) = 1$ ,

astfel încât  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ . Rezultă că  $m^2 = 2n^2$  (1), de unde 2 divide pe  $m$ , adică există  $l \in \mathbb{N}^*$ , astfel

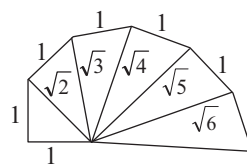
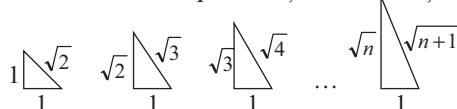
încât  $m = 2l$  (2). Revenind la (1), găsim  $2l^2 = n^2$ , ceea ce conduce la 2 divide pe  $n$ , adică există  $k \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $n = 2k$  (3). Din (2) și (3) obținem că  $2 \mid (m, n)$ , în contradicție cu ipoteza

$(m, n) = 1$ . Prin urmare,  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

d) Numerele iraționale se reprezintă pe axă în două moduri:

(i) prin aproximare cu numere zecimale;

(ii) prin utilizarea compasului și a construcției următoare:



**Spirala lui Arhimede**

e) Are loc următorul rezultat: Dacă  $a \in \mathbb{Q}^*$  și  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci:

i)  $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

ii)  $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

• Fie  $x$  și  $y$  două numere reale astfel încât  $x$  este la **stânga** lui  $y$  pe axa numerelor. Spunem că  $x$  este **mai mic** decât  $y$  și scriem  $x < y$  sau  $\xrightarrow{\quad x \quad y \quad}$  spunem că  $y$  este mai mare decât  $x$  și scriem  $y > x$ .

Dacă  $x < y$  sau  $x = y$ , spunem că  $x$  este mai mic sau egal cu  $y$  și scriem  $x \leq y$  sau că  $y$  este mai mare sau egal cu  $x$  și scriem  $y \geq x$ .

Dacă  $|x| < |y|$ , atunci și  $\sqrt{|x|} < \sqrt{|y|}$  și reciproc.

• **Partea întregă** a unui număr real  $x$ , notată  $[x]$ , este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu  $x$ .

**Exemple:** a)  $[3,24] = 3$ ; b)  $[-2,87] = -3$ .

• Fie  $x$  un număr real. Diferența  $x - [x]$  se numește **partea fracționară** a lui  $x$ , notată  $\{x\}$ .

**Exemple:** a)  $\{5,75\} = 5,75 - 5 = 0,75$ ; b)  $\{-5,75\} = -5,75 - (-6) = 6 - 5,75 = 0,25$ .

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

### PE Înțelegere \*

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a)  $-4 \in \mathbb{Z}$ ; b)  $-\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ ; c)  $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ ; d)  $0 \notin \mathbb{N}$ ; e)  $-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} \in \mathbb{Q}$ ; f)  $\sqrt{18} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

g)  $-\sqrt{64} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; h)  $\frac{-32}{8} \in \mathbb{Z}$ ; i)  $\frac{3\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}$ ; j)  $\{3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$ ; k)  $\{-7\} \subset \mathbb{Z}$ ;

l)  $\sqrt{11} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; m)  $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; n)  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$ ;

o)  $\left\{-\frac{1}{3}; 0, (6); -\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}; 1,41(6); 1,2(7)\right\} \subset \mathbb{Q}$ ; p)  $\left\{-\frac{3}{8}; -2,91(6); 2,3(8); \frac{-4\sqrt{25}}{\sqrt{9}}; \frac{5\sqrt{36}}{-\sqrt{49}}\right\} \subset \mathbb{Q}$ .

2. Se consideră numerele:  $-7$ ;  $-4$ ;  $6$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $-\sqrt{64}$ ;  $2,08(3)$ ;  $-\sqrt{3}$ ;  $-\sqrt{12}$ ;  $\sqrt{(-15)^2}$ ;  $\sqrt{(-18)^2}$ ;

$-0,8(3)$ ;  $2$ ;  $17$ ;  $\sqrt{144}$ ;  $-\sqrt{169}$ . Precizați care dintre numerele de mai sus sunt:

a) numere naturale; b) numere raționale; c) numere întregi;  
d) numere negative; e) numere reale; f) numere iraționale.

3. Fie mulțimea  $A = \{x \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 125\}$ . Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare numărul  $n$ , numărul corespunzător  $x$  să fie:

a) rațional; b) irațional.

4. a) Reprezentați pe axă punctele:  $A(\sqrt{4})$ ;  $B\left(\sqrt{\frac{49}{4}}\right)$ ;  $C\left(-\sqrt{\frac{128}{2}}\right)$ ;  $D(-\sqrt{6,25})$ .

b) Fie  $E, F, G, H$  simetricile punctelor  $A, B, C$ , respectiv  $D$ , față de originea axei. Determinați abscisele punctelor  $E, F, G, H$  și reprezentați pe axă aceste puncte.

c) Calculați abscisele punctelor  $M, N, P, Q$ , mijloacele segmentelor  $HB, GA, CE$ , respectiv  $FD$  și reprezentați-le pe axă.

d) Determinați lungimile segmentelor  $|CG|, |EA|, |DH|, |QM|, |MN|, |PA|$ .

5. Se dau numerele  $\sqrt{125}$ ;  $\sqrt{4,25}$ ;  $\sqrt{245,64}$ ;  $\sqrt{1200}$ ;  $\sqrt{256,24}$ .

a) Aproximați prin lipsă, la sutime, numerele de mai sus.

b) Aproximați prin adaos, la sutime, numerele de mai sus.

**PE-PP** 4. Raționalizarea numitorului unei fracții



Operația de **raționalizare** a numitorului unei fracții, exprimat printr-un număr irațional de forma  $a\sqrt{b}$  cu  $a \in \mathbb{Q}^*$  și  $b \in \mathbb{Q}_+$ , este operația în urma căreia, prin **amplificarea** fracției cu un factor, numitorul obținut se transformă într-un număr rațional.

**Raționalizarea numitorului de forma  $a\sqrt{b}$ ,  $a \in \mathbb{Q}^*$ ,  $b \in \mathbb{Q}_+$**

În acest caz procedăm după regula:  $\sqrt{b} \frac{c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{ab}$ ,  $a \in \mathbb{Q}^*$ ,  $b \in \mathbb{Q}_+$ .

**Exemple:** (i)  $\sqrt[3]{\frac{21}{\sqrt{3}}} = \frac{21\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{3}$ ; (ii)  $-\frac{18}{\sqrt{27}} = -\frac{18}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{6}{3} = -\frac{6\sqrt{3}}{3} = -2\sqrt{3}$ .

**Observație:** Există numitori ai unor fracții și de forma:  $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$ ,  $a, c \in \mathbb{Q}^*$ ,  $b, d \in \mathbb{Q}_+$ , iar raționalizarea se poate face folosind formula:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ , numitorul devenind un număr rațional.

**Exemplu:**  $\frac{15}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} = \frac{15(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}{32 - 27} = \frac{15(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}{5} = 3(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ .

● ● ● **activități de învățare** ● ● ●

**PE** **Înțelegere \***

1. Raționalizați numitorii:

- a)  $\frac{12}{\sqrt{3}}$ ;  $-\frac{9}{3\sqrt{3}}$ ;  $\frac{16}{2\sqrt{2}}$ ;  $\frac{42}{2\sqrt{7}}$ ;  $\frac{18}{2\sqrt{3}}$ ;  $\frac{12}{3\sqrt{2}}$ ;  $\frac{36}{3\sqrt{6}}$ ;  $\frac{21}{\sqrt{7}}$ ;
- b)  $\frac{15}{\sqrt{3}}$ ;  $-\frac{24}{2\sqrt{6}}$ ;  $\frac{21}{\sqrt{3}}$ ;  $\frac{10}{\sqrt{5}}$ ;  $-\frac{20}{2\sqrt{5}}$ ;  $-\frac{30}{2\sqrt{5}}$ ;  $\frac{35}{\sqrt{5}}$ ;  $\frac{30}{\sqrt{50}}$ ;
- c)  $\frac{14}{\sqrt{2}}$ ;  $-\frac{15}{\sqrt{5}}$ ;  $-\frac{24}{\sqrt{8}}$ ;  $\frac{16}{\sqrt{32}}$ ;  $-\frac{36}{\sqrt{27}}$ ;  $\frac{24}{\sqrt{12}}$ ;  $-\frac{45}{\sqrt{75}}$ ;  $\frac{\sqrt{63}}{3\sqrt{7}}$ ;
- d)  $\frac{18}{3\sqrt{2}}$ ;  $-\frac{48}{\sqrt{56}}$ ;  $\frac{\sqrt{72}}{8\sqrt{6}}$ ;  $-\frac{60}{\sqrt{75}}$ ;  $-\frac{64}{\sqrt{48}}$ ;  $-\frac{56}{\sqrt{84}}$ ;  $\frac{48}{3\sqrt{12}}$ ;  $-\frac{45}{\sqrt{60}}$ ;
- e)  $\sqrt{7\frac{1}{5}}$ ;  $\sqrt{8\frac{4}{7}}$ ;  $\sqrt{5\frac{1}{3}}$ ;  $\sqrt{4\frac{1}{6}}$ ;  $\sqrt{3\frac{1}{5}}$ ;  $\sqrt{16\frac{2}{3}}$ ;  $\sqrt{9\frac{3}{5}}$ ;  $\sqrt{9\frac{3}{8}}$ ;
- f)  $\sqrt{8\frac{1}{3}}$ ;  $\sqrt{8\frac{1}{6}}$ ;  $\sqrt{13\frac{1}{2}}$ ;  $\sqrt{10\frac{4}{5}}$ ;  $\sqrt{10\frac{2}{3}}$ ;  $\sqrt{6\frac{6}{7}}$ ;  $\sqrt{14\frac{2}{5}}$ ;  $\sqrt{25\frac{3}{5}}$ ;
- g)  $\frac{12}{2\sqrt{3}}$ ;  $\frac{27}{3\sqrt{3}}$ ;  $\frac{45}{3\sqrt{5}}$ ;  $\frac{72}{6\sqrt{2}}$ ;  $\frac{48}{6\sqrt{6}}$ ;  $\frac{54}{3\sqrt{6}}$ ;  $\frac{28}{2\sqrt{7}}$ ;  $\frac{42}{6\sqrt{7}}$ .

**PE-PP** 8. Ecuații de forma  $x^2 = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$



- A rezolva o ecuație de forma  $x^2 = a$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ , în mulțimea  $P \subseteq \mathbb{R}$ , înseamnă a determina toate valorile  $x_0 \in P$  pentru care propoziția  $x_0^2 = a$  este adevărată.
- Valorile găsite, dacă există, se numesc **soluții** ale ecuației, iar mulțimea lor, notată de obicei cu  $S$ , se numește **mulțimea soluțiilor** ecuației. Dacă mulțimea  $P$  nu este precizată, se consideră  $P = \mathbb{R}$ .
- Rezolvarea ecuației  $x^2 = a$ , unde  $a \in \mathbb{Q}$ , necesită analiza a trei cazuri:
  1. Dacă  $a < 0$ , atunci  $S = \emptyset$ , deoarece  $x^2 \geq 0 > a$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
  2. Dacă  $a = 0$ , atunci ecuația devine  $x^2 = 0$ , având soluția unică  $x = 0$ . Deci,  $S = \{0\}$ .
  3. Dacă  $a > 0$ , atunci ecuația  $x^2 = a$  se poate scrie sub forma  $x^2 - a = 0$ , adică  $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ , având soluțiile:  $x_1 = -\sqrt{a}$  și  $x_2 = \sqrt{a}$ , adică  $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ . Sau:  $x^2 = a$ ,  $a > 0$ , se mai poate scrie  $|x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ .

**Exerciții rezolvate:**

1. Ecuația  $x^2 = 1 - \sqrt{4}$  nu are soluții, deoarece  $1 - \sqrt{4} < 0$ , deci  $S = \emptyset$ .
2. Ecuația  $7x^2 - 5 = 5(x + 1)(x - 1)$  este echivalentă cu  $7x^2 - 5 = 5x^2 - 5$ , de unde rezultă că  $2x^2 = 0$ , adică  $x^2 = 0$ , deci  $S = \{0\}$ .
3. Ecuația  $5x^2 - 45 = 0$  este echivalentă cu  $x^2 = 9$ , deci  $S = \{-3, 3\}$ . Această ecuație se poate rezolva și prin altă metodă:  $5x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$ , de unde se obține  $x - 3 = 0$  sau  $x + 3 = 0$ , adică  $x = 3$  sau  $x = -3$ , de unde  $S = \{-3, 3\}$ .
4.  $x^2 + 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4^2$ , de unde rezultă că  $x + 3 = 4$  sau  $x + 3 = -4$  și se obțin soluțiile  $x_1 = 1$  și  $x_2 = -7$ , deci  $S = \{-7, 1\}$ . Se poate rezolva și altfel:  $(x + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = 0$ , de unde  $x - 1 = 0$  sau  $x + 7 = 0$ , adică  $x_1 = 1$  și  $x_2 = -7$ .
5.  $9x^2 = 27 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow 9x^2 = 18 + 18\sqrt{2} + 9 \Leftrightarrow 9x^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 \Leftrightarrow 9x^2 = (3\sqrt{2} + 3)^2 \Leftrightarrow 9x^2 = 9(\sqrt{2} + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2} + 1$ , adică  $x = \sqrt{2} + 1$  sau  $x = -\sqrt{2} - 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} + 1$  și  $x_2 = -\sqrt{2} - 1$ .  $S = \{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1\}$ .

● ● ● **activități de învățare** ● ● ●

**PE** **Înțelegere** \*

1. Precizați care dintre ecuațiile de mai jos admit pe  $x = -2$  ca soluție:
  - a)  $x^2 = 4$ ;
  - b)  $3x^2 = 18$ ;
  - c)  $(x - 3)^2 = 25$ ;
  - d)  $2x^2 - 3 = 5$ ;
  - e)  $(2x + 1)^2 = 27$ ;
  - f)  $(2x - 3)^2 = 49$ ;
  - g)  $x^3 - 8 = -3$ ;
  - h)  $2x^2 - 9 = -1$ .
2. **A.** Verificați dacă  $-3$  este soluție a următoarelor ecuații:
  - a)  $x^2 = 9$ ;
  - b)  $7x^2 - 2 = 61$ ;
  - c)  $(x - 1)^2 = 4$ ;
  - d)  $(2x + 1)^2 = 49$ .**B.** Verificați dacă  $-2$  este soluție a următoarelor ecuații:
  - a)  $x^2 = 4$ ;
  - b)  $5x^2 - 3 = 17$ ;
  - c)  $(x + 1)^2 = 9$ ;
  - d)  $(2x - 1)^2 = 25$ .

b)  $x^2 = \frac{4}{9}$ ;  $x^2 = \frac{18}{25}$ ;  $x^2 = \frac{16}{25}$ ;  $x^2 = \frac{8}{9}$ ;  $x^2 = \frac{72}{49}$ ;  
c)  $x^2 = 1\frac{7}{9}$ ;  $x^2 = 1\frac{11}{16}$ ;  $x^2 = 2\frac{7}{9}$ ;  $x^2 = 4\frac{11}{16}$ ;  $x^2 = 13\frac{4}{9}$ ;  
d)  $(x-2)^2 = 324$ ;  $(x+1)^2 = 256$ ;  $(x+3)^2 = 121$ ;  $(x-4)^2 = 72$ ;  
e)  $x^2 = \sqrt{1296}$ ;  $x^2 = \sqrt{625}$ ;  $x^2 = \sqrt{2401}$ ;  $x^2 = \sqrt{4096}$ ;  
f)  $x^2 = \sqrt{15^2 + 20^2}$ ;  $x^2 = \sqrt{20^2 - 12^2}$ ;  $x^2 = \sqrt{45^2 - 27^2}$ .

**13.** Rezolvați ecuațiile:

a)  $\frac{25x^2}{3} = 0, (6)$ ; b)  $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{75} = 0$ ; c)  $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2} = 0$ ;  
d)  $\sqrt{5}x^2 - \sqrt{245} = 0$ ; e)  $16x^2 = \sqrt{441}$ ; f)  $25x^2 - \sqrt{729} = 0$ .

**PE Aplicare și exersare \*\***

**14.** Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos:

a)  $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{243} = 0$ ; b)  $\sqrt{6}x^2 = \sqrt{96}$ ; c)  $\sqrt{2}x^2 = \sqrt{162}$ ; d)  $2x(x-2) = 2(9-2x)$ ;  
e)  $x(x+2) = 2(x+8)$ ; f)  $x(x-4) = 4(4-x)$ ; g)  $x(x-1) = 4-x$ ; h)  $2(x^2-48) = x^2-24$ ;  
i)  $2x^2-15 = x^2+21$ ; j)  $x^2+4^2 = 5^2$ ; k)  $13^2-x^2 = 5^2$ .

**15.** Determinați soluțiile următoarelor ecuații:

a)  $\frac{x^2+4x}{8} = \frac{2x+8}{4}$ ; b)  $\frac{x-2}{3} = \frac{27}{x-2}$ ; c)  $\frac{x-\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{x-\sqrt{3}}$ ;  
d)  $\frac{x^2+4x-3}{4} = \frac{x^2+5x+3}{5}$ ; e)  $\frac{x-2\sqrt{2}}{8} = \frac{4}{x-2\sqrt{2}}$ ; f)  $\frac{x}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2x}$ .

**16.** Rezolvați ecuațiile:

a)  $(2x-5)^2 = 9$ ; b)  $(2x-3)^2 = 25$ ; c)  $(2x+7)^2 = 81$ ; d)  $(2x-1)^2 = 49$ ;  
e)  $3(2x+5)^2 = 27$ ; f)  $3(2x-7)^2 = 75$ ; g)  $4(2x+1)^2 = 36$ ; h)  $2(2x+3)^2 = 162$ ;  
i)  $3(2x-1)^2 = 147$ ; j)  $2(2x+3)^2 = 98$ .

**PE Aprofundare și performanță \*\*\***

**17.** Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos.

a)  $3(x+3)^2 - 38 = 109$ ; b)  $4(x-4)^2 + 13 = 157$ ; c)  $6(x-2)^2 - 29 = 25$ ;  
d)  $5(x+4)^2 + 22 = 342$ ; e)  $2(2x-1)^2 + 21 = 71$ ; f)  $3(2x-7)^2 - 32 = 43$ ;  
g)  $4(2x+3)^2 - 63 = 133$ ; h)  $2(2x-5)^2 + 29 = 191$ .

**18.** Rezolvați ecuațiile:

a)  $(x+\sqrt{2})^2 = 8$ ; b)  $(x-\sqrt{3})^2 = 27$ ; c)  $(x+2\sqrt{2})^2 = 32$ ; d)  $(x-3\sqrt{3})^2 = 48$ ;  
e)  $(x-2\sqrt{2})^2 = 50$ ; f)  $(x+3\sqrt{3})^2 = 75$ ; g)  $(x+4\sqrt{2})^2 = 72$ ; h)  $(x-4\sqrt{3})^2 = 27$ ;  
i)  $(x-4\sqrt{2})^2 = 98$ ; j)  $(x+5\sqrt{2})^2 = 18$ .

**19.** Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos.

a)  $(2x+\sqrt{2})^2 = 162$ ; b)  $(2x-5\sqrt{3})^2 = 27$ ; c)  $(2x+3\sqrt{3})^2 = 147$ ;

❁ TESTUL 1 ❁

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.*

**Subiectul I (30 puncte)**

- (5p) **1.** Valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $3x^2 + 2 = 50$  sunt:  
 a)  $\{-4; 4\}$ ;      b)  $\{-3; 3\}$ ;      c)  $\{-2; 2\}$ ;      d)  $\{3; 4\}$ .
- (5p) **2.** Dacă  $\frac{3x^2}{64} = \frac{27}{4}$ , atunci valorile reale ale lui  $x$  sunt:  
 a)  $\{-12; 12\}$ ;      b)  $\{-6; 6\}$ ;      c)  $\{-4; 4\}$ ;      d)  $\{-3; 3\}$ .
- (5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației  $(2x + 5)^2 = 121$  este:  
 a)  $\{-8; 2\}$ ;      b)  $\{-8; 3\}$ ;      c)  $\{-4; 3\}$ ;      d)  $\{-4; 2\}$ .
- (5p) **4.** Valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $x^2 = (2 - \sqrt{5})^2$  sunt:  
 a)  $\{-\sqrt{5}; -5\}$ ;      b)  $\{-\sqrt{2}, -2\}$ ;      c)  $\{\sqrt{2} - 3; 3 - \sqrt{2}\}$ ;      d)  $\{2 - \sqrt{5}; \sqrt{5} - 2\}$ .
- (5p) **5.** Valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $\frac{1}{16}x^2 = 0,25$  sunt:  
 a)  $\{-5; 5\}$ ;      b)  $\{-4; 4\}$ ;      c)  $\{-3; 3\}$ ;      d)  $\{-2; 2\}$ .
- (5p) **6.** Mulțimea soluțiilor ecuației  $(2x - \sqrt{3})^2 = 27$  este:  
 a)  $\{-3\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ ;      b)  $\{-2\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ ;      c)  $\{-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}$ ;      d)  $\{-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$ .

**Subiectul al II-lea (20 puncte)**

- (5p) **1.** Mulțimea soluțiilor ecuației  $\frac{5x-10}{9} = \frac{20}{x-2}$  este:  
 a)  $\{-6; -4\}$ ;      b)  $\{-6; 4\}$ ;      c)  $\{-4; 8\}$ ;      d)  $\{4; 6\}$ .
- (5p) **2.** Mulțimea soluțiilor ecuației  $3(x-2)^2 - 5 = 43$  este:  
 a)  $\{-6; -2\}$ ;      b)  $\{-6; 2\}$ ;      c)  $\{-2; 6\}$ ;      d)  $\{2; 6\}$ .
- (5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației  $3(2x+3)^2 - 16 = 59$  este:  
 a)  $\{-4; -3\}$ ;      b)  $\{-4; -1\}$ ;      c)  $\{-4; 1\}$ ;      d)  $\{3; 4\}$ .
- (5p) **4.** Mulțimea soluțiilor ecuației  $(2x - \sqrt{2})^2 = 18$  este:  
 a)  $\{-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$ ;      b)  $\{\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$ ;      c)  $\{-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$ ;      d)  $\{\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$ .

**Subiectul al III-lea (40 puncte)**

- (20p) **1.** Rezolvați ecuația  $3(2x + 3\sqrt{3})^2 - 79 = 146$ .
- (20p) **2.** Rezolvați ecuația  $12(x + 1)^2 = (6 + 2\sqrt{3})^2$ .

## Probleme pentru performanță școlară și pregătirea olimpiadelor

1. a) Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere raționale cu proprietatea că  $a\sqrt{3} - b\sqrt{5} = 0$ , demonstrați că  $a = b = 0$ .

b) Determinați toate perechile de numere raționale  $(x; y)$  care verifică egalitatea:

$$\sqrt{3(x+1)^2} - 2\sqrt{3} = |y+1| \cdot \sqrt{5} - |\sqrt{3} - \sqrt{5}|.$$

2. Fie numărul  $x = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^4} + \dots + \sqrt{2^{2018}} + \sqrt{2^{2019}}$  și  $y = 2^{1010} - \sqrt{2}$ . Calculați partea întregă a numărului  $\frac{x}{y}$ .

3. Numerele întregi  $a$  și  $b$  verifică relația  $3a + 4b = 100$ . Determinați cea mai mică valoare posibilă pe care o poate lua numărul  $|a - b|$ .

4. Numerele naturale nenule  $a, b, c$  verifică relația  $\frac{2a}{3b+4c} = \frac{3b}{4c+2a} = \frac{4c}{2a+3b}$ . Determinați valorile lui  $a, b, c$  știind că  $7a - 6b - 5c = 2019$ .

5. Se consideră numerele  $x = \sqrt{6 - \sqrt{35}}$  și  $y = \sqrt{6 + \sqrt{35}}$ . Calculați

$$(x - y)^2 \text{ și } (x - y + \sqrt{10})^{2020}.$$

6. Determinați mulțimea  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot x \right\}$ .

7. Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$  pentru care  $\frac{a}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} - \frac{b}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$ .

8. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația  $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$ .

9. Se consideră numerele reale pozitive  $a, b, c, d$  astfel încât  $a + b + c + d = 1010$ . Arătați că  $\sqrt{a(b+c+d)} + \sqrt{b(a+c+d)} + \sqrt{c(a+b+d)} + \sqrt{d(a+b+c)} \leq 2020$ .

10. a) Dacă  $0 < x < 2y < 5$ , arătați că numărul  $a = \sqrt{(x-2y)^2} + \sqrt{(x+2y-16)^2} + \sqrt{4x^2}$  este pătrat perfect.

b) Demonstrați că nu există  $x$  și  $y$  numere întregi astfel încât  $|x - 3y + 4| + |x + 3y - 4| < 2$ .

11. Se consideră numerele reale strict pozitive  $x, y, z$  pentru care  $x + y + z = 1346$ . Arătați că  $\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} \leq 2019$ .

12. Determinați valorile naturale nenule ale lui  $n$  pentru care  $\frac{2\sqrt{n} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{n}} \in \mathbb{Z}$ .



# Geometrie

## Capitolul I Patrulatere

### PP Competențe specifice

- C1. Identificarea patruleterelor particulare în configurații geometrice date
- C2. Descrierea patruleterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
- C3. Utilizarea proprietăților patruleterelor în rezolvarea unor probleme
- C4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere
- C5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
- C6. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere

### PE-PP 1. Patrulatere convexe



**Definiție.** Poligonul cu patru laturi se numește **patrulater**.

**Definiție.** Un patrulater se numește **convex** dacă dreapta suport a oricăreia dintre laturi nu separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

**Definiție.** Un patrulater se numește **concav** dacă există o dreaptă suport a unei laturi care separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

**Teoremă.** Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu  $360^\circ$ .

### ● ● ● activități de învățare ● ● ●

#### PE Înțelegere \*

1. Măsurile unghiurilor  $A$ ,  $B$  și  $C$  ale triunghiului  $ABC$  sunt proporționale cu numerele 4, 5 și 3. Perpendiculara în  $C$  pe  $BC$  intersectează paralela prin  $A$  la  $BC$  în punctul  $D$ . Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului  $ABCD$ .
2. În patrulaterul convex  $ABCD$  se știe că  $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle A$ ;  $\sphericalangle C = 3 \cdot \sphericalangle A$  și  $\sphericalangle D = 2 \cdot \sphericalangle B$ .
  - a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
  - b) Arătați că diagonala  $AC$  nu poate fi congruentă cu latura  $AB$ .

## PE-PP 5. Rombul



**Definiție.** Rombul este **paralelogramul** cu două **laturi consecutive congruente**.

Dacă un paralelogram este romb, atunci are diagonalele perpendiculare și, reciproc, dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci este romb.

Un paralelogram este **romb** dacă și numai dacă o diagonală a sa este inclusă în bisectoarea unghiului din care aceasta pornește.

### ● ● ● activități de învățare ● ● ●

#### PE Înțelegere \*

1. Construieți un romb  $ABCD$  care are  $\sphericalangle BAD = 60^\circ$  și  $BD = 6$  cm, cu  $BD < AC$ .
2. Într-un romb  $ABCD$ ,  $\sphericalangle BAD = 60^\circ$  și  $BD = 12$  cm. Aflați perimetrul rombului.
3. În rombul  $MNPQ$ ,  $\sphericalangle NMP = 30^\circ$ ,  $MP \cap NQ = \{O\}$  și  $NO = 6$  cm, cu  $NQ < MP$ . Aflați perimetrul rombului.
4. În dreptunghi cu dimensiunile egale cu 12 cm și 8 cm are perimetrul egal cu perimetrul unui romb. Calculați lungimea laturii rombului.
5. Rombul  $ABCD$  are măsura unghiului  $\sphericalangle ABC = 120^\circ$  și lungimea diagonalei  $BD = 8$  cm. Calculați perimetrul rombului.
6. Un triunghi echilateral cu latura egală cu 16 cm are perimetrul egal cu perimetrul unui romb. Calculați latura rombului.
7. Triunghiurile  $ADC$  și  $ABC$  sunt echilaterale. Stabiliți natura patrulaterului convex  $ADCB$ .
8. Fie triunghiul isoscel  $ABC$ ,  $AB \equiv AC$  și semidreapta  $AD$  bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $D \in BC$ . Dacă  $E$  este simetricul lui  $A$  față de  $D$ , arătați că  $ABEC$  este romb.
9. Perimetrul unui romb este egal cu 50 cm, iar lungimea diagonalei mici este egală cu 12,5 cm. Determinați măsurile unghiurilor rombului.
10. Un romb are un unghi cu măsura egală cu  $120^\circ$ , iar lungimea diagonalei mici egală cu 18 cm. Calculați perimetrul rombului.

#### PE Aplicare și exersare \*\*

11. Arătați că mijloacele laturilor unui romb sunt vârfurile unui dreptunghi.
12. În triunghiul  $ABC$  ( $AB < AC$ ),  $BD$  bisectoarea unghiului  $ABC$ ,  $D \in AC$ , se duce  $AM \perp BD$ ,  $M \in BD$ ,  $AM \cap BC = \{N\}$ . Prin punctul  $N$  se duce o paralelă la latura  $AB$  care intersectează bisectoarea  $BD$  în  $P$ . Arătați că  $ABNP$  este romb.
13. În triunghiul  $MNP$ , semidreapta  $NQ$  este bisectoarea unghiului  $MNP$ ,  $Q \in MP$ . Prin  $Q$  se duc  $QD \parallel NP$ ,  $D \in MN$ , și  $DE \perp NQ$ ,  $E \in NQ$ . Știind că  $DE \cap NP = \{F\}$ , arătați că  $DNFQ$  este romb.
14. Fie  $ABCD$  un romb de centru  $O$ . Știind că  $E$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABD$  și  $F$  centrul de greutate al triunghiului  $BDC$ , stabiliți natura patrulaterului  $DEBF$ .
15. Se consideră triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $BC = 10,4$  cm. Știind că  $D$  este simetricul lui  $B$  față de  $A$  și  $E$  este simetricul lui  $C$  față de  $A$ , arătați că  $BCDE$  este romb și calculați perimetrul său.
16. În paralelogramul  $ABCD$  cu  $BD \perp AD$  se notează cu  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $AB$  și, respectiv,  $DC$ . Arătați că  $BMDN$  este romb.



• Aria unui **triunghi** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi  $a$  și înălțimea corespunzătoare ei  $h$ :  $\mathcal{A} = \frac{a \cdot h}{2}$ .

• Dacă în triunghiul  $ABC$  se notează  $AB = c$ ,  $AC = b$  și  $BC = a$ , atunci aria triunghiului este dată de **formula lui Heron**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (semiperimetrul triunghiului).}$$

### Proprietatea medianei

Orice mediană împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente (au ariile egale).

### Observații:

- **Aria triunghiului** se calculează cu una dintre formulele:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{AC \cdot BN}{2} = \frac{AB \cdot CP}{2}.$$

(Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă.)

- Dacă triunghiul este dreptunghic,  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ , putem folosi formula:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}, \text{ unde } AB \text{ și } AC \text{ sunt catetele triunghiului.}$$

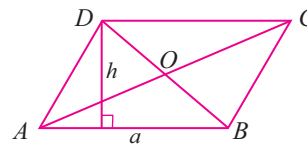
- Dacă  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ , atunci  $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$ , de unde, din cele două formule

adevărate pentru triunghiul dreptunghic, rezultă că  $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$ .

• Aria unui **paralelogram** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi  $a$  și înălțimea corespunzătoare ei  $h$ .

$$\mathcal{A} = a \cdot h$$

$$\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{AOD} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB}.$$



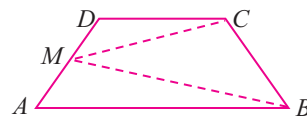
• Aria unui **dreptunghi** este egală cu produsul dintre lungimea  $L$  și lățimea  $l$  ale sale:  $\mathcal{A} = L \cdot l$ .

• Aria unui **romb** este egală cu semiprodusul dintre lungimile diagonalelor sale:  $\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ .

**Observație:** Dacă  $ABCD$  este trapez,  $AB \parallel CD$ ,  $AM \equiv DM$ ,  $M \in AD$ , atunci  $\mathcal{A}_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD}$ .

• Aria unui **pătrat** este egală cu pătratul lungimii laturii sale  $l$ :  $\mathcal{A} = l^2$ .

• Aria unui **trapez** este egală cu semiprodusul dintre suma lungimilor bazelor  $B$ ,  $b$  și lungimea înălțimii  $h$  a trapezului:  $\mathcal{A} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ .



**Definiție.** Distanța dintre două drepte paralele este distanța de la un punct al uneia la cealaltă.

**Definiție.** Înălțimea unui trapez este distanța dintre dreptele ce conțin bazele.

**Definiție.** Două suprafețe care au ariile egale se numesc *echivalente*.

## ●●● activități de învățare ●●●

### PE Înțelegere \*

1. Calculați:
  - a) aria unui triunghi cu lungimea bazei egală cu 60 cm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 3,5 dm;
  - b) aria unui paralelogram cu lungimea unei laturi egală cu 180 mm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 6 cm;
  - c) aria unui dreptunghi cu lungimile laturilor 24 cm și 1,5 dm;
  - d) aria unui pătrat cu latura de 0,025 m;
  - e) aria unui romb cu lungimile diagonalelor egale cu 18 cm și 24 cm.
2. Calculați:
  - a) aria unui romb cu latura de 30 cm și înălțimea de 28,8 cm;
  - b) aria unui trapez cu înălțimea de 15 cm și lungimea liniei mijlocii egală cu 18 cm;
  - c) aria unui trapez dreptunghic având lungimile bazelor egale cu 16 cm și 25 cm, iar lungimile laturilor neperalele egale cu 12 cm și, respectiv, 15 cm;
  - d) aria patrulaterului  $ABCD$ , cu  $AC = 28$  cm,  $BD = 35$  cm și  $AC \perp BD$ .
3. În triunghiul oarecare  $ABC$  se duc  $AM \perp BC$ ,  $M \in BC$ , și  $BN \perp AC$ ,  $N \in AC$ .
  - a) Dacă  $AC = 18$  cm,  $BN = 12$  cm,  $AM = 9$  cm, calculați  $BC$  și  $\mathcal{A}_{ABC}$ .
  - b) Dacă  $AC = 15$  cm,  $BN = 12$  cm,  $BC = 20$  cm, calculați  $AM$  și  $\mathcal{A}_{ABC}$ .
  - c) Dacă  $AM = 6$  cm,  $AC = 18$  cm,  $\mathcal{A}_{ABC} = 72$  cm<sup>2</sup>, calculați  $BC$  și  $BN$ .
4. În triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ , se duce  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ .
  - a) Dacă  $AB = 9$  cm,  $AC = 12$  cm,  $AD = 7,2$  cm, calculați  $\mathcal{A}_{ABC}$  și  $BC$ .
  - b) Dacă  $AB = 12$  cm,  $AC = 16$  cm,  $AD = 9,6$  cm, calculați  $\mathcal{A}_{ABC}$  și  $BC$ .
  - c) Dacă  $AC = 20$  cm,  $BC = 25$  cm,  $AD = 12$  cm, calculați  $\mathcal{A}_{ABC}$  și  $AB$ .
  - d) Dacă  $AD = 14,4$  cm,  $AB = 18$  cm,  $\mathcal{A}_{ABC} = 216$  cm<sup>2</sup>, calculați  $AC$  și  $BC$ .
  - e) Dacă  $AC = 24$  cm,  $BC = 40$  cm,  $\mathcal{A}_{ABC} = 384$  cm<sup>2</sup>, calculați  $AB$  și  $AD$ .
5. În paralelogramul  $ABCD$  se notează  $AC \cap BD = \{O\}$ . Dacă  $\mathcal{A}_{AOB} = 216$  cm<sup>2</sup>, calculați  $\mathcal{A}_{ABCD}$ .
6. Calculați aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu lungimea ipotenuzei de 20 cm.
7. Fie  $ABCD$  un dreptunghi.
  - a) Dacă  $AB = 15,6$  cm și  $BC = 10$  cm, calculați  $\mathcal{A}_{ABCD}$ .
  - b) Dacă  $\mathcal{A}_{ABCD} = 432,5$  cm<sup>2</sup>,  $AB = 17,3$  cm, calculați  $BC$ .
  - c) Dacă  $\mathcal{A}_{ABCD} = 225$  cm<sup>2</sup>,  $AB = 12,5$  cm, calculați  $BC$ .
  - d) Dacă  $AB = 24$  cm și  $BC = 15$  cm, calculați  $\mathcal{A}_{ABCD}$ .
  - e) Dacă  $BC = 7,5$  cm și  $\mathcal{A}_{ABCD} = 93,75$  cm<sup>2</sup>, calculați  $AB$ .
8. În triunghiul  $ABC$ ,  $AM$  este mediană,  $M \in BC$ . Știind că  $\mathcal{A}_{ABC} = 168$  cm<sup>2</sup> și  $AB = 21$  cm, calculați:
  - a) distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $AB$ ;
  - b) aria triunghiului  $ACM$ .
9. Calculați aria unui romb cu diagonala mică de 12 cm și diagonala mare egală cu triplul diagonalei mici.
10. Calculați aria unui dreptunghi în fiecare dintre cazurile de mai jos:
  - a) perimetrul dreptunghiului este de 150 cm și lățimea este un sfert din lungime;
  - b) perimetrul dreptunghiului este de 126 cm și lățimea are 40% din lungime.

# Capitolul II

## Cercul

### PP Competențe specifice

- C1. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
- C2. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
- C3. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
- C4. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
- C5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări
- C6. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri

**Definiție.** Dacă se dă un punct fix  $O$  în plan și un număr pozitiv  $r$  și considerăm toate punctele din plan care se găsesc la distanța  $r$  de punctul  $O$ , mulțimea acestor puncte o vom numi **cerc** de centru  $O$  și rază  $r$  și o vom nota  $\mathcal{C}(O, r)$ .



Definiția cercului o mai putem formula și astfel:

- Se numește **cerc** locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centru.

Notăm cercul de centru  $O$  și rază  $r$  astfel:  $\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM = r\}$ .

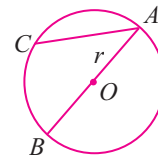
- În anumite situații, prin **rază** vom înțelege și segmentul care unește centrul cercului cu un punct al cercului. Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă**. O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**.

- Lungimea oricărui diametru este  $2r$ . Două puncte de pe cerc care sunt extremitățile unui diametru se numesc **puncte diametral opuse**.

- Două cercuri sunt **congruente** dacă și numai dacă au razele egale. Scriem:

$$\mathcal{C}(O_1, r_1) \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2) \text{ dacă și numai dacă } r_1 = r_2.$$

În figura alăturată, segmentul  $AC$  este coardă, iar  $AB$  este diametru. Segmentele  $OA$ ,  $OB$  și  $OC$  sunt raze. Avem  $OA = OB = OC = r$  și  $AB = 2r$ .



### Interior. Exterior. Disc

- Mulțimea  $\text{Int } \mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM < r\}$  se numește **interiorul cercului**.

- Mulțimea  $\text{Ext } \mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM > r\}$  se numește **exteriorul cercului**.

- Mulțimea  $\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM \leq r\}$  se numește **disc** de centru  $O$  și rază  $r$ .

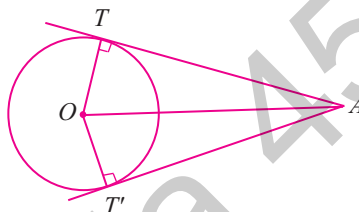
Toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte.

**Generalizare.** Toate unghiurile care au vârful pe un cerc și ale căror laturi conțin capetele arcului sunt congruente.

**Teoremă.** Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două și numai două tangente la acest cerc.

**Observație:** Fie  $A$  un punct exterior unui cerc de centru  $O$ , și  $T$  și  $T'$  puncte de contact ale tangentelor din  $A$  la cerc. Atunci:

- $TA \equiv T'A$ ;
- $AO$  este bisectoarea unghiului  $TAT'$ ;
- $OA$  este bisectoarea unghiului  $TOT'$ ;
- $OA$  este mediatoarea segmentului  $TT'$ .



### ● ● ● activități de învățare ● ● ●

#### PE Înțelegere \*

- Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ ,  $R = 12$  cm, se iau două puncte distincte  $A$  și  $B$ . Determinați lungimea coardei  $AB$ , dacă:
  - $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ ;
  - $\sphericalangle AOB = 180^\circ$ .
- Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , se iau două puncte distincte  $A$  și  $B$ . Determinați măsura arcului mic  $\widehat{AB}$ , dacă:
  - $\sphericalangle AOB = 75^\circ$ ;
  - $\sphericalangle OBA = 50^\circ$ ;
  - $\sphericalangle OAB = 45^\circ$ .
- Măsura arcului  $\widehat{AB}$  reprezintă 40% din măsura cercului  $\mathcal{C}(O, R)$ . Calculați măsura unghiului la centru  $AOB$ .
- Măsura arcului  $\widehat{PQ}$  reprezintă 35% din măsura cercului  $\mathcal{C}(O, R)$ . Calculați măsurile unghiurilor triunghiului  $OPQ$ .
- Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , se iau două puncte distincte  $A$  și  $B$ . Determinați măsurile unghiurilor triunghiului  $AOB$ , dacă măsura arcului mic  $\widehat{AB}$  este egală cu:
  - $\widehat{AB} = 45^\circ$ ;
  - $\widehat{AB} = 60^\circ$ ;
  - $\widehat{AB} = 80^\circ$ ;
  - $\widehat{AB} = 90^\circ$ ;
  - $\widehat{AB} = 120^\circ$ ;
  - $\widehat{AB} = 150^\circ$ .
- Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , se iau punctele distincte  $M, N, P, Q, R, S$ , în această ordine, astfel încât  $MN \parallel PS$  și  $QP \equiv RS$ . Demonstrați că  $MR \equiv NQ$ .
- Triunghiul isoscel  $OMN$  are vârful  $O$  în centrul unui cerc dat, iar baza  $MN$  intersectează cercul în punctele  $A$  și  $B$ , unde  $B \in AN$  și  $A \in MB$ . Demonstrați că  $AM \equiv BN$ .
- Triunghiul isoscel  $OPQ$  are vârful  $O$  în centrul unui cerc dat și baza  $PQ$ . Știind că dreapta  $PQ$  intersectează cercul în punctele  $A$  și  $B$  astfel încât  $B \in AQ$  și  $A \in PB$ , demonstrați că  $AP \equiv BQ$  și  $AQ \equiv PB$ .
- Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , se consideră punctele distincte  $M$  și  $N$ , iar punctele  $P$  și  $Q$  sunt mijloacele arcelor determinate de ele pe cerc. Arătați că  $PQ$  este diametrul cercului.

# Modele de teste pentru evaluarea finală

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 120 de minute.

## ✿ TESTUL 1 ✿

### Subiectul I (30 puncte)

- (5p) 1. Rezultatul calculului  $\sqrt{(-2)^6 \cdot 3^2} - \sqrt{(-2)^4 \cdot 3^2}$  este egal cu:  
a) 4;                      b) 6;                      c) 8;                      d) 12.
- (5p) 2. Calculând  $\sqrt{4 + \sqrt{3^4}}$ , se obține:  
a) 3;                      b) 4;                      c) 5;                      d) 6.
- (5p) 3. Rezultatul calculului  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$  este:  
a) -1;                      b) 1;                      c)  $\sqrt{3}$ ;                      d) 2.
- (5p) 4. Calculând  $\sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2} - \sqrt{(-2)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2}$ , se obține:  
a) 10;                      b) 20;                      c) 30;                      d) 40.
- (5p) 5. Rezultatul calculului  $\sqrt{6 \cdot \sqrt{576}} - \sqrt{3 \cdot \sqrt{144}}$  este egal cu:  
a) 6;                      b) 8;                      c) 9;                      d) 12.
- (5p) 6. Numerele întregi  $x$  pentru care  $2x^2 - 11 = 7$ , sunt:  
a)  $x \in \{-4; 4\}$ ;                      b)  $x \in \{-3; 3\}$ ;                      c)  $x \in \{-2; 2\}$ ;                      d)  $x \in \{2; 3\}$ .

### Subiectul al II-lea (30 puncte)

- (5p) 1. Un dreptunghi are lungimea egală cu 15 cm și lățimea egală cu 8 cm. Aria dreptunghiului este egală cu:  
a) 110 cm<sup>2</sup>;                      b) 112 cm<sup>2</sup>;                      c) 118 cm<sup>2</sup>;                      d) 120 cm<sup>2</sup>.
- (5p) 2. În paralelogramul  $ABCD$ , cu  $AC \cap BD = \{O\}$ , aria triunghiului  $AOB$  este egală cu 36 cm<sup>2</sup>. Aria paralelogramului  $ABCD$  este egală cu:  
a) 108 cm<sup>2</sup>;                      b) 132 cm<sup>2</sup>;                      c) 144 cm<sup>2</sup>;                      d) 160 cm<sup>2</sup>.
- (5p) 3. În rombul  $ABCD$ , cu diagonala  $BD = 16$  cm și măsura unghiului  $ABC$  egală cu 120°, lungimea laturii  $AB$ , a rombului, este egală cu:  
a) 12 cm;                      b) 16 cm;                      c) 18 cm;                      d) 20 cm.
- (5p) 4. În dreptunghiul  $ABCD$ , cu  $AC \cap BD = \{O\}$ , diagonala  $AC = 16$  cm, iar unghiul  $AOB$  este egal cu 120°. Perimetrul triunghiului  $AOB$  este egal cu:  
a) 16 cm;                      b) 18 cm;                      c) 20 cm;                      d) 24 cm.
- (5p) 5. În trapezul dreptunghic  $ABCD$ , cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ ,  $AD = 8$  cm, iar  $CD = 6$  cm. Lungimea bazei mari  $AB$  este egală cu:  
a) 12 cm;                      b) 14 cm;                      c) 16 cm;                      d) 18 cm.

- (5p) 6. În rombul  $ABCD$ , măsura unghiului  $\sphericalangle BAD$  este egală cu  $45^\circ$ . Măsura unghiului  $ADC$  este egală cu:  
 a)  $75^\circ$ ;                      b)  $90^\circ$ ;                      c)  $120^\circ$ ;                      d)  $135^\circ$ .

**Subiectul al II-lea (30 puncte)**

- (5p) 1. Determinați valorile întregi ale lui  $x$  pentru care  $x^2 = a$ , unde:

$$a = \sqrt{12^2 + 2^8} - \sqrt{12^2 + 3^4} + \sqrt{(-2)^4}.$$

- (5p) 2. Determinați valoarea numărului real

$$a = 2\sqrt{216} + \sqrt{12}(\sqrt{48} - 2\sqrt{18}) - \sqrt{18}(\sqrt{32} - \sqrt{12}).$$

- (5p) 3. Calculați:  $\left(\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right) \cdot 2\sqrt{6} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \cdot 3\sqrt{6}$ .

- (5p) 4. În paralelogramul  $ABCD$ , cu  $AC \cap BD = \{O\}$ , punctele  $M$  și  $N$  aparțin laturilor  $AB$ , respectiv  $CD$ , astfel încât  $AM \equiv CN$ . Demonstrați că:

- a)  $OM \equiv ON$ ;                      b) Punctele  $M, O, N$  sunt coliniare.

- (5p) 5. În triunghiul  $ABC$ ,  $BD$  este mediană, cu  $D \in AC$ , iar  $EF$  este linie mijlocie,  $E \in AB$  și  $F \in BC$ . Știind că  $EF \cap BD = \{O\}$ , demonstrați că:

- a)  $OB \equiv OD$ ;                      b)  $OE \equiv OF$ .

- (5p) 6. În dreptunghiul  $ABCD$  ( $AB > BC$ ) se iau punctele  $M \in AB$ ,  $N \in BC$ ,  $P \in CD$  și  $Q \in DA$ , astfel încât  $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$ , iar  $MP \cap NQ = \{Q\}$ . Demonstrați că:

- a)  $OM \equiv OP$ ;                      b)  $ON \equiv OQ$ .

**TESTUL 2**

**Subiectul I (30 puncte)**

- (5p) 1. Rezultatul calculului  $\sqrt{(-3)^4 \cdot (-2)^2} - \sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2}$  este egal cu:

- a) 2;                      b) 3;                      c) 4;                      d) 6.

- (5p) 2. Calculând  $\sqrt{2^2 \cdot 3} + 2^3 \cdot 3$ , se obține:

- a) 4;                      b) 6;                      c) 8;                      d) 12.

- (5p) 3. Rezultatul calculului  $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$  este:

- a) 1;                      b)  $\sqrt{2}$ ;                      c) 2;                      d) 3.

- (5p) 4. Calculând  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$ , se obține:

- a) 1;                      b)  $\sqrt{3}$ ;                      c) 2;                      d) 3.

- (5p) 5. Rezultatul calculului  $\sqrt{50} - \sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$  este:

- a)  $-\sqrt{2}$ ;                      b) 0;                      c)  $\sqrt{2}$ ;                      d)  $2\sqrt{2}$ .

- (5p) 6. Numerele întregi  $x$  pentru care  $3x^2 - 7 = 5$ , sunt:

- a)  $x \in \{-4; 4\}$ ;                      b)  $x \in \{-3; 3\}$ ;                      c)  $x \in \{-2; 2\}$ ;                      d)  $x \in \{2; 3\}$ .



# Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.

## ✿ TESTUL 1 ✿

- (1p) 1. Arătați că numărul  $x$  este număr natural pătrat perfect, unde:  
$$x = \sqrt{3 \cdot 0, (3)} + \sqrt{30 \cdot 0, 0(3)} + \sqrt{300 \cdot 0, 00(3)} + \sqrt{3000 \cdot 0, 000(3)}.$$
- (2p) 2. Calculați  $a \cdot b$  și  $\frac{a}{b}$ , unde:  
$$a = \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{98} - \sqrt{18} - \sqrt{8} \text{ și } b = \sqrt{147} - \sqrt{108} + \sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{12}.$$
- (1p) 3. Calculați valoarea numărului real:  
$$a = \sqrt{(\sqrt{8} - 4)^2} + \sqrt{(\sqrt{18} - 6)^2} + 5\sqrt{(1 - \sqrt{8})^2} + \sqrt{(\sqrt{50} - 8)^2}.$$
- (1p) 4. Fie  $ABCD$  un patrulater convex în care punctele  $M, N, P, Q$  sunt mijloacele laturilor  $AB, BC, CD$ , respectiv  $AD$ . Demonstrați că  $MNPQ$  este paralelogram.
- (2p) 5. Fie  $ABCD$  un pătrat în care punctul  $E$  este mijlocul laturii  $AB$ , iar  $F \in AD$ , astfel încât  $AF = 16$  cm și  $AE = 12$  cm.  
a) Calculați aria triunghiului  $CEF$ .  
b) Dacă  $EF = 20$  cm, calculați distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $EF$ .
- (2p) 6. Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  se consideră punctele  $A, B, C$  și  $D$  (în această ordine) în sensul mișcării acelor de ceasornic, astfel încât arcele de cerc  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$  și  $\widehat{AD}$  sunt direct proporționale cu numerele 3; 4; 6, respectiv 5. Calculați:  
a) măsurile arcelor  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ , respectiv  $\widehat{AD}$ .  
b) măsurile unghiurilor  $\sphericalangle A; \sphericalangle B; \sphericalangle C$ , respectiv  $\sphericalangle D$ .

## ✿ TESTUL 2 ✿

- (1p) 1. Arătați că numărul  $x$  este pătratul unui număr rațional, unde:  
$$x = \frac{3}{4} \cdot \left[ \sqrt{3 \cdot 0, (592)} + \sqrt{30 \cdot 0, 0(592)} + \sqrt{300 \cdot 0, 00(592)} + \sqrt{3000 \cdot 0, 000(592)} \right].$$
- (2p) 2. Calculați  $a \cdot b$  și  $\frac{a}{b}$ , unde:  
$$a = \sqrt{12} - \sqrt{147} + \sqrt{27} - \sqrt{48} - \sqrt{75} \text{ și } b = \sqrt{128} - \sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{32} - \sqrt{8}.$$
- (1p) 3. Calculați valoarea numărului real:  
$$a = \sqrt{(4 - 2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(4\sqrt{5} - 9)^2} + \sqrt{(6\sqrt{5} - 14)^2} + 4\sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2}.$$
- (1p) 4. Fie  $ABCD$  un paralelogram în care punctele  $M \in AB, N \in BC, P \in CD$  și  $Q \in AD$ , astfel încât  $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$ . Arătați că patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.
- (2p) 5. În paralelogramul  $ABCD$ , cu  $AC \cap BD = \{O\}$ , iar aria triunghiului  $BOC$  este egală cu  $72$  cm<sup>2</sup>.  
a) Aflați aria paralelogramului  $ABCD$ .  
b) Dacă  $AC = 48$  cm, aflați distanța de la punctul  $B$  la diagonala  $AC$ .

## Probleme pentru performanță școlară și pregătirea olimpiadelor

1. Considerăm pătratul  $ABCD$  și punctele  $E \in BC$ ,  $F \in DC$ . Dacă  $\sphericalangle BAE = 15^\circ$  și  $\sphericalangle DAF = 30^\circ$ , determinați  $\sphericalangle AEF$ .

*Gazeta Matematică nr. 7-8-9/2011*

2. Se consideră trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$  și  $AC \perp BD$ . Fie  $E$  mijlocul diagonalei  $AC$ . Paralela prin  $E$  la  $BD$  intersectează pe  $AB$  în  $M$ . Demonstrați că:

a) triunghiul  $AMC$  este isoscel;    b)  $ME = \frac{BD}{2}$  și  $CM = \frac{AB + CD}{2}$ .

O.L. Alba 2016

3. Fie trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB < CD$ , și punctele  $T \in (DC)$ ,  $AT \perp CD$ ,  $M$  mijlocul lui  $AC$ . Dacă  $MT \parallel BD$ , demonstrați că  $ABCD$  este trapez isoscel.

O.L. Prahova 2018

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  în care înălțimea  $AD$  și mediana  $BM$  au aceleași lungimi ( $D \in BC$ ,  $M \in AC$ ), iar  $\{G\} = AD \cap BM$ . Arătați că  $GM = AG - GD$ .

O.L. Prahova 2018

5. Fie  $ABC$  un triunghi oarecare, iar  $M$  și  $D$  mijloacele segmentelor  $AB$ , respectiv  $BC$ . Dacă  $E \in AD$ , astfel încât  $AD = 4 \cdot ED$ , iar  $ME \cap BC = \{N\}$ , demonstrați că:

a)  $ME \equiv EN$ ;    b)  $DN \equiv NC$ .

O.L. Ilfov 2016

6. În triunghiul isoscel  $ABC$ , cu  $AB \equiv AC$  și  $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ , fie  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $AC$  și, respectiv,  $BC$ . Fie  $MP \perp BC$ ,  $P \in BC$  și  $MP \cap AB = \{Q\}$ . Demonstrați că  $AQMN$  este romb.

O.L. Mureș 2016

7. Fie paralelogramul  $ABCD$ , astfel încât  $3DB = 2DA$  și  $\sphericalangle ADB = 60^\circ$ . Arătați că  $AC = 2AB$ .

*Gazeta Matematică nr. 10/2016*

8. Fie triunghiul isoscel  $ABC$ ,  $AB \equiv AC$ , și  $\sphericalangle BAC > 60^\circ$ . Considerăm punctul  $D \in BC$  astfel încât  $BD \equiv AC$ . Demonstrați că semidreapta  $(AD$  și mediatoarea segmentului  $DC$  se intersectează pe bisectoarea unghiului exterior triunghiului  $ABC$  cu vârful în  $C$ .

*Gazeta Matematică nr. 9/2018*

9. Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic isoscel cu baza  $BC$ . Perpendicularele în punctul  $A$  pe  $AB$ , respectiv  $AC$  intersectează dreapta  $BC$  în  $E$  și respectiv  $F$ .

Dacă  $EN \perp AC$ ,  $N \in AC$ ,  $FM \perp AB$ ,  $M \in AB$  și  $EN \cap FM = \{P\}$ , demonstrați că:

- a)  $AEPF$  și  $ABPC$  sunt romburi;  
b)  $MNST$  este dreptunghi, unde  $\{T\} = PB \cap AF$  și  $\{S\} = PC \cap AE$ .

*Gazeta Matematică nr. 10/2017*

# Indicații și răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:  
(Scațați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)



## RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

### Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

#### Algebră

**Testul 1. 1.** a)  $a = -14$ ;  $b = -6$ ;  $n = -8$ ; b)  $x = -9$ ;  $y = -8$ ;  $n = -17$ . **2.** a)  $S = \{3\}$ ; b)  $S = \{3\}$ ; c)  $S = \{4\}$ ; d)  $S = \{-2\}$ . **3.** a)  $x \in \{0, 1, 2\}$ ; b)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; c)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . **4.** a)  $x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ ; b)  $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ; c)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . **5.** a)  $n \in \{-10, -4, -2, 0, 2, 8\}$ ; b)  $n \in \{-10, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 6\}$ ; c)  $n \in \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$ ; d)  $n \in \{-7, -1, 0, 6\}$ . **6.** a)  $\frac{7}{20}$ ; b)  $-\frac{43}{84}$ ;

c)  $-\frac{25}{48}$ ; d)  $\frac{1}{12}$ . **7.**  $377 = an + 17$ ,  $17 < n$ ;  $517 = bn + 13$ ,  $13 < n$ ;  $803 = cn + 11$ ,  $11 < n \Rightarrow 360 = an$ ,

$504 = bn$ ,  $792 = cn$ ,  $n > 17 \Rightarrow n \mid (360; 504; 792) \Rightarrow n \mid 72 \Rightarrow n \in \{18, 24, 36, 72\}$ . **8.**  $n = 20a + 14$ ,  $n = 24b + 18$ ,  $n = 28c + 22 \Rightarrow n + 6 = 20(n + 1)$ ,  $n + 6 = 24(b + 1)$ ,  $n + 6 = 28(c + 1) \Rightarrow [20; 24; 28] \mid$

$n + 6 \Rightarrow n = 840k - 6$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pentru  $k = 1$  se obține  $n = 834$ . **9.** a)  $12 \mid \overline{a24b}$ ,  $a \neq 0 \Rightarrow 3 \mid \overline{a24b}$ ,

$4 \mid \overline{a24b}$ ,  $(3; 4) = 1$ ; din  $3 \mid \overline{a24b} \Rightarrow 3 \mid a + b + 6 \Rightarrow a + b + 6 = \mathcal{M}_3$ ; din  $4 \mid \overline{a24b} \Rightarrow b \in \{0, 4, 8\}$ ;

$b = 0 \Rightarrow a + 6 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{3, 6, 9\}$ ;  $b = 4 \Rightarrow a + 10 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{2, 5, 8\}$ ;  $b = 8 \Rightarrow a + 14 = \mathcal{M}_3$

$\Rightarrow a \in \{1, 4, 7\}$ ;  $(a, b) \in \{(3, 0), (6, 0), (9, 0), (2, 4), (5, 4), (8, 4), (1, 8), (4, 8), (7, 8)\}$ ; b)  $(a, b) \in$

$\in \{(4, 0), (2, 2), (9, 4), (2, 6), (5, 8)\}$ ; c)  $(a, b) \in \{(7, 0), (3, 4), (8, 8)\}$ . **10.** a)  $a = 12x$ ,  $b = 12y$ ,

$(x; y) = 1$ ,  $x < y$ ,  $xy = 42$ . Am folosit  $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$ .  $x = 1 \Rightarrow y = 42 \Rightarrow a = 12$ ,  $b = 504$ ;  $x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 21 \Rightarrow a = 24$ ,  $b = 252$ ;  $x = 3 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow a = 36$ ,  $b = 168$ ; b)  $a - b = \{120, 240, 480, 1560\}$ .

**11.** a) Fie  $d \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $d = (9n + 17; 12n + 23) \Rightarrow d \mid 9n + 17$  și  $d \mid 12n + 23 \Rightarrow d \mid 36n + 68$  și

$d \mid 36n + 69 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (9n + 17; 12n + 23) = 1 \Rightarrow$  fracția este ireductibilă; b), c), d) Analog a).

**12.**  $A = 12^n \cdot 68 = 4 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid A$ . **13.**  $A = 4^n \cdot 42 = 2 \cdot 21 \cdot 4^n \Rightarrow 21 \mid A$ .

**Testul 2. 1.** a)  $a = -12$ ;  $b = -9$ ;  $n = +6$ ; b)  $x = -24$ ;  $y = -18$ ;  $n = -6$ . **2.** a)  $S = \{5\}$ ; b)  $S = \{-7\}$ ; c)  $S =$

$\{4\}$ ; d)  $S = \{4\}$ . **3.** a)  $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2\}$ ; b)  $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; c)  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ .

**4.** a)  $-\frac{13}{20}$ ; b)  $-\frac{7}{18}$ ; c)  $\frac{7}{16}$ ; d)  $\frac{7}{6}$ . **5.** a)  $n \in \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$ ; b)  $n \in \{-14, -8, -6, -5, -4, -3,$

$-1, 0, 1, 2, 4, 10\}$ ; c)  $n \in \{-17, -3, -2, 0, 1, 3, 4, 18\}$ ; d)  $n \in \{-18, -4, -3, -1, 0, 2, 3, 17\}$ . **6.**  $n \in$

$\in \{18, 36\}$ . **7.**  $(a, b) \in \{(12, 360), (24, 180), (36, 120), (60, 72)\}$ . **8.**  $n = 426$ . **9.** a)  $(a, b) \in \{(0, 2),$

$(3, 2), (6, 2), (9, 2), (2, 6), (5, 6), (7, 6)\}$ ; b)  $(a, b) \in \{(8, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 6), (0, 8), (9, 8)\}$ ;

c)  $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (5, 4), (1, 8)\}$ ; d)  $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (4, 5)\}$ . **10.** a)  $x = 54$ ,  $y = 72$ ,  $z =$

$= 108$ ,  $t = 36$ ; b)  $a = 56$ ,  $b = 84$ ,  $c = 126$ ; c)  $a = 24$ ,  $b = 72$ ,  $c = 96$ . **11.** a)  $A = 16^n \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid A$ ;

b)  $A = 30^n \cdot 11 \Rightarrow 11 \mid A$ ; c)  $a = 102 \cdot 12^n = 6 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid a$ .

**Testul 3. 1.** a)  $a = -12$ ;  $b = -6$ ;  $n = 2$ ; b)  $x = -21$ ;  $y = -12$ ;  $n = -9$ . **2.** a)  $S = \{2\}$ ; b)  $S = \{3\}$ ; c)  $S = \{7\}$ ;

d)  $S = \{-4\}$ . **3.** a)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; b)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; c)  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; d)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**4.** a)  $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; b)  $x \in \{-5, -4, -3, -2\}$ ; c)  $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ . **5.** a)  $A = \{3, 4, 5, 8, 11, 20\}$ ;

$B = \{0, 1, 3, 5, 9, 21\}$ ;  $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 20, 21\}$ ;  $A \cap B = \{3, 5\}$ ;  $A \setminus B = \{4, 8, 11, 20\}$ ;

# ALGEBRĂ

## CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

### RĂDĂCINA PĂTRATĂ

#### 1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

1.	$x$	-5	-3	-2	0	$\pm 4$	$\pm 6$	9	12
	$x^2$	25	9	4	0	16	36	81	144

2. a) 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; b) 144; 169; 196; 225; 256; 289; c) 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961. 3. a)  $\pm 5$ ; b)  $\pm 8$ ; c)  $\pm 11$ ; d)  $\pm 27$ ; e)  $\pm 36$ . 4. a)  $2^2 \cdot 3^2$ ; b)  $2^6$ ; c) 1 nu este prim; d)  $13^2$ ; e)  $2^2 \cdot 3^4$ ; f)  $23^2$ ; g)  $2^8 \cdot 3^4$ ; h)  $7^2 \cdot 2^6 \cdot 5^2$ ; i)  $2^6 \cdot 5^6$ ; j)  $2^{12} \cdot 5^4$ ; k)  $11^2 \cdot 13^6$ . 5. a) 36; 4; 169; 196; 225; 256; b)  $13^2$ ;  $(-9)^4$ ;  $3^8$ ;  $(-12)^{18}$ ;  $(-28)^6$ ; c)  $5^{8n}$ ;  $7^{6n+4}$ ;  $15^{n^2+n}$ ;  $12^{n^2-n+6}$ ;  $n > 1, n \in \mathbb{N}$ . 6. a)  $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ ; b)  $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . 7. a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) F; g) F; h) F. 8. (i) a) 6; b) 40; c) 7; d) 6; e) 16; f) 13; g) 12; h) 8; i)  $x \in \{1; 5\}$ ; j)  $x \in \emptyset$ ; k)  $x \in \{1\}$ ; l)  $x \in \{14\}$ ; (ii) a)  $\pm 6$ ; b)  $\pm 40$ ; c)  $\pm 7$ ; d)  $\pm 6$ ; e)  $\pm 16$ ; f)  $\pm 13$ ; g)  $\pm 12$ ; h)  $\pm 8$ ; i)  $x \in \{1; 5\}$ ; j)  $x \in \{-7; -1\}$ ; k)  $x \in \{-7; 1\}$ ; l)  $x \in \{-4; 14\}$ . 9. a)  $2^{101}$ ; b)  $3^{125}$ ; c)  $5^{180}$ ; d)  $3^{50}$ ; e)  $6^{100}$ ; f)  $8^{1010}$ . 10. a)  $70^2$ ; b)  $113^2$ ; c)  $1010^2$ ; d)  $1010^2$ ; e)  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 17^2$ ; f)  $1009^2$ . 11. a) 99; b) 105; c) 18; d) 180; e) 15; f) 50; g) 50; h) 88. 12. a)  $x = 9^n$ ;  $\sqrt{x} = 3^n$ ; b)  $x = 25^n$ ;  $\sqrt{x} = 5^n$ ; c)  $x = 16^{n+2}$ ;  $\sqrt{x} = 4^{n+2}$ ; d)  $x = 4^{n+3}$ ;  $\sqrt{x} = 2^{n+3}$ . 13.  $x = 36^2 \cdot 12^{2n}$ . 14.  $x = 2^{2020} = (2^{1010})^2$ . 15. a)  $x = 49 \cdot 144 = (7 \cdot 12)^2 = 84^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 84$ ; b)  $x = 49 \cdot 100 = (7 \cdot 10)^2 = 70^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 70$ ; c)  $x = 501^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 501$ ; d)  $x = 1011^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1011$ ; e)  $x = 1203^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1203$ . 16. a)  $x = 2 + 15(2^2 + 2^6 + \dots + 2^{1998}) \Rightarrow u(x) = 2 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$ ; b)  $x = 3 + 40(3^2 + 3^6 + \dots + 3^{1998}) \Rightarrow u(x) = 3 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$ . 17. a)  $x = 1010^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1010$ ; b)  $a = 289 \cdot 576 \Rightarrow \sqrt{a} = 408$ ; c)  $n = 361 \Rightarrow \sqrt{n} = 19$ ; d)  $n = 729 = 27^2$ ;  $x^2 = 27^2 \Rightarrow |x| = 27 \Rightarrow x \in \{-27, 27\}$ ; e)  $n = 729 = 27^2 \Rightarrow \sqrt{n} = 27$ . 18. a)  $u(x) \in \{3, 8\}$ ; b)  $u(x) \in \{3, 8\}$ ; c)  $u(x) \in \{3, 8\}$ ; d)  $u(x) = 2$ ; e)  $u(x) = 8$ ; f)  $u(x) = 3$ ; g)  $u(x) = 7$ ; h)  $u(x) = 3$ ; i)  $x = 8 + 585(8^2 + 8^6 + \dots + 8^{2014}) \Rightarrow u(x) = 8 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$ ; j)  $x = 7 + 400(7^2 + 7^6 + \dots + 7^{2018}) \Rightarrow u(x) = 7 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$ . 19.  $n = 10x + 8, n \in \mathbb{N}, (\forall) x$  cifră nenulă. 20.  $A = \sqrt{49 \cdot 25^{2n} \cdot 9^{2n+2}} = 7 \cdot 25^n \cdot 9^{n+1}$ . 21.  $a = 625 \cdot 49^n \cdot 24^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 25 \cdot 7^n \cdot 24^n = \text{nr. par.}$  22.  $a = 13^2 \cdot 5^{2n} \cdot 12^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 13 \cdot 5^n \cdot 12^n = \text{nr. par.}$  23. a) 14;  $23^2$ ; 35;  $3^3$ ;  $7^2$ ;  $|a|$ ;  $a^2$ ;  $a^4$ ;  $|a^3|$ ; b)  $2^2 \cdot 3$ ;  $16 \cdot 5$ ;  $2 \cdot 3 \cdot 5$ ;  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ;  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 18$ ;  $5 \cdot 3^2 \cdot 12$ . 24. a)  $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ ; b)  $2 \cdot 5^2 \cdot 7$ ; c)  $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ ; d)  $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ ; e)  $2^2 \cdot 14 \cdot 15$ ; f)  $2 \cdot 7 \cdot 3^2$ ; g)  $2^3 \cdot 5$ ; h)  $2^3 \cdot 3^2$ ; i)  $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ ; j)  $3^2 \cdot 5 \cdot 11$ ; k)  $2^5 \cdot 3^3$ ; l)  $7 \cdot 26$ . 25. a) 23; b)  $23^2$ ; c)  $23^3$ ; d)  $17^4$ ; e) 15; f)  $36^2$ ; g) 48; h)  $12^2$ ; i)  $2^{12}$ ; j)  $2^{1009}$ ; k)  $3^{1010}$ ; l)  $6^{1009}$ ; m)  $7^{1010}$ ; n)  $5^{1008}$ . 26. a) 24; 27; 25; 18; b) 20; 28; 21; 26; c) 40; 36; 42; 45; d) 50; 48; 56; 72. 27. a) 61; 44; 68; 96; b) 85; 47; 84; 63; c) 46; 59; 62; 54; d) 113; 213; 123; 126. 28. a) 444; b) 150; c) 289; d) 289. 29. a)  $6^2$ ; b)  $3 \cdot 11^2$ ; c)  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ; d)  $2^3 \cdot 14 \cdot 9$ ; e) 13; f) 13; g) 21; h)  $2^4$ . 30. a)  $2^5$ ; b)  $5^2$ ; c) 75; d) 15; e) 17; f) 25; g) 50; h) 10. 31. a) 15; b) 20; c) 25; d) 18; e) 17; f) 108; g) 70. 32. a) 18; b) 63; c) 36; d) 632; e) 42; f) 31. 33. a) 80; b) 535; c) 51; d) 27. 34. a) 344; b) 257. 35. a) 1010; b) 2; c) 1010; d) 501; e) 505. 36.  $a = (10 \cdot 40^n)^2$ . 37. 239. 38. Card  $A = 13$ , card  $B = 39$ .

#### 2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ

1.  $B = \left\{ \frac{4}{9}; \frac{9}{64}; 64; 1; \frac{25}{9}; \frac{16}{9}; \frac{49}{36}; \frac{25}{144}; \frac{49}{144} \right\}$ .

2. a)	$a$	-0,8	$-\frac{5}{8}$	$-4^2$	$-1^3$	-0,25	0,08(3)	1,41(6)	1,2(6)	$\frac{5}{4}$	3	4,25	2,3(8)
	$a^2$	0,64	$\frac{25}{64}$	256	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{289}{144}$	$\frac{361}{225}$	$\frac{25}{16}$	9	$\frac{289}{16}$	$\frac{1849}{324}$

$$+\frac{1}{b+4} + \frac{1}{c+5} = \frac{2018}{2019}; n = \frac{(a+3)-4}{a+3} + \frac{(b+4)-4}{b+4} + \frac{(c+5)-4}{c+5}; n = 3 - 4\left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+4} + \frac{1}{c+5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = -\frac{2015}{2019}. \mathbf{16.} \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{n}}{3\sqrt{3} - \sqrt{n}} = a \Rightarrow \frac{\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} + 2\right)}{\sqrt{n}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - 1\right)} = a, a \in \mathbb{Z}; \sqrt{\frac{3}{n}} + 2 = a; \sqrt{\frac{3}{n}} = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n =$$

$$= 3x^2; a = \frac{2x+1}{3-x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3-x \mid 2x+1 \Rightarrow x \in \{2, 4, 10\} \Rightarrow n \in \{12, 48, 300\}. \mathbf{17. a)} x = \frac{\sqrt{3}(3^{1010}-1)}{\sqrt{3}-1};$$

$$\mathbf{b)} y = \frac{3(3^{1010}-1)(3^{1010}+1)}{2}; z = \frac{y}{x} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{3(3^{1010}-1)(3^{1010}+1)}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(3^{1010}-1)} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow z =$$

$$= 3^{1010} + 1 - 1 = 3^{1010} = (3^{505})^2. \mathbf{18.} a \in \{-10; 4\}; b \in \{-3; -1\}. \mathbf{19.} \overline{ab} = 81. \mathbf{20. a)} E^2(x) = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E(x)| = 8 \Rightarrow |x+3| = 8 \Rightarrow x \in \{-11; 5\}; \mathbf{b)} a \in \{-2; -1\}. \mathbf{21.}$$
 Egalitatea din enunț se poate scrie:

$$(a-1-2\sqrt{a-1}+1) + (b-a-2\sqrt{b-a}+1) + (c-b-2\sqrt{c-b}+1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a-1}-1)^2 + (\sqrt{b-a}-1)^2 +$$

$$+(\sqrt{c-b}-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 2; b = 3; c = 4. \mathbf{22.} x = 7; y = 4. \mathbf{23.} 2\sqrt{a-4} = \sqrt{4(a-4)} \leq \frac{4+a-4}{2} = \frac{a}{2};$$

$$3\sqrt{b-9} = \sqrt{9(b-9)} \leq \frac{9+b-9}{2} = \frac{b}{2}; 4\sqrt{c-16} = \sqrt{16(c-16)} \leq \frac{16+c-16}{2} = \frac{c}{2}. \text{Deci } 2\sqrt{a-4} +$$

$$+ 3\sqrt{b-9} + 4\sqrt{c-16} \leq \frac{a+b+c}{2}. \text{Egalitatea are loc pentru } a = 8; b = 18; c = 32. \mathbf{24.} a + 2 \geq 2\sqrt{2a};$$

$$2b + 3 \geq 2\sqrt{6b}; 3c + 4 \geq 2\sqrt{12c} \Rightarrow (a+2)(2b+3)(3c+4) \geq 96\sqrt{abc} = 96 \cdot \frac{1}{6} = 16. \text{Inegalitatea este}$$

strictă, deoarece egalitățile  $a = 2, 2b = 3, 3c = 4$  și  $36abc = 1$  nu sunt îndeplinite simultan.

*Observație:* Poate fi înlocuită ipoteza  $36abc = 1$  cu  $abc = 4$  și concluzia cu  $(a+2)(2b+3)(3c+4) \geq$

$$\geq 192. \text{Egalitatea are loc } \Leftrightarrow a = 2, 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}, 3c = 4 \Rightarrow c = \frac{4}{3}. \mathbf{25.}$$
 Se notează  $|x_1 - x_2| = 2|x_2 -$

$$- x_3| = 3|x_3 - x_4| = \dots = 2019|x_{2019} - x_{2020}| = 2020|x_{2020} - x_1| = k, \text{ de unde rezultă că } x_1 - x_2 = \pm k;$$

$$x_2 - x_3 = \pm \frac{k}{2}; x_3 - x_4 = \pm \frac{k}{3}; \dots; x_{2019} - x_{2020} = \pm \frac{k}{2019}; x_{2020} - x_1 = \pm \frac{k}{2020}. \text{Prin însumare se obține}$$

$$k\left(\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \dots \pm \frac{1}{2019} \pm \frac{1}{2020}\right) = 0 \Rightarrow k = 0. \text{Deci numerele sunt egale. } \mathbf{26.} a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3};$$

$$c = 3; P = 3(\sqrt{3}+1). \mathbf{27.} a(a-1) + |b+2| + (c^2-4)^2 \geq 0, \text{ deoarece } a(a-1) \geq 0, |b+2| \geq 0;$$

$$(c^2-4)^2 \geq 0. \text{Deci } a = 1; b = -2; c = 2.$$

## GEOMETRIE

### CAPITOLUL I. PATRULATERE

#### 1. Patrulatere convexe

**1.**  $\sphericalangle A = 105^\circ; \sphericalangle B = 75^\circ; \sphericalangle C = 90^\circ; \sphericalangle D = 90^\circ.$  **2. a)**  $\sphericalangle A = 36^\circ; \sphericalangle B = 72^\circ; \sphericalangle C = 108^\circ; \sphericalangle D = 144^\circ;$

**b)** Se folosește metoda reducerii la absurd și se ajunge la  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD = 36^\circ$  (fals). **3.**  $\sphericalangle A = 60^\circ;$

$\sphericalangle B = 80^\circ; \sphericalangle C = 100^\circ; \sphericalangle D = 120^\circ.$  **4.** Notăm cu  $a$  măsura celor trei unghiuri congruente (în grade) și

cu  $b$  măsura celui alt unghi; atunci  $3a + b = 360^\circ$ ; *Cazul I.*  $a + b = 170^\circ$ , de unde se obține  $a = 95^\circ$  și  $b = 75^\circ$ . *Cazul II.* Dacă  $2a = 170^\circ$ , atunci  $a = 85^\circ$  și  $b = 105^\circ$ . **5.**  $\sphericalangle A = 115^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 85^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 95^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 65^\circ$ . **6.**  $\sphericalangle A = 45^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 75^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 105^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 135^\circ$ . **7.**  $\sphericalangle A = 36^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 72^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 108^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 144^\circ$ . **8.**  $\sphericalangle A = 112^\circ 30'$ ;  $\sphericalangle B = 135^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 22^\circ 30'$ . **9.**  $\sphericalangle A = 45^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 120^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 135^\circ$ . **10.**  $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 126^\circ$  și  $\sphericalangle E = 90^\circ$ . **11.**  $\sphericalangle A = \sphericalangle N = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle M = 140^\circ$ . **12.**  $\sphericalangle B = 104^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 72^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 144^\circ$ . **13.**  $\sphericalangle A = 80^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 160^\circ$ ;  $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 60^\circ$ . **14.**  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 75^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 135^\circ$ . **15.**  $90^\circ$ . **16.**  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 120^\circ$ . **17.**  $\sphericalangle A = 112^\circ 30'$ ;  $\sphericalangle B = 135^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 22^\circ 30'$ . **18.**  $\sphericalangle AMC = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle MAB = 140^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 40^\circ$ ;  $\sphericalangle BCM = 90^\circ$ . **19.**  $\sphericalangle A = 75^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 135^\circ$ . **20.**  $\sphericalangle C = 55^\circ$ ;  $\sphericalangle ADC = 85^\circ$ ;  $\sphericalangle DBC = 69^\circ$ ;  $\sphericalangle ABD = 41^\circ$ . **21.**  $\sphericalangle QMN = 130^\circ$ ;  $\sphericalangle MNP = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle QPN = 70^\circ$ . **22.**  $NQ = 32$  cm. **23.**  $\mathcal{P}_{MQP} = 86$  cm. **24.**  $\sphericalangle M = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle N = 80^\circ$ ;  $\sphericalangle P = 100^\circ$ ;  $\sphericalangle Q = 120^\circ$ . **25.** a)  $\triangle NMT \equiv \triangle NPR$  (C.U.)  $\Rightarrow NT \equiv NR$ ;  $MN \equiv PN$ ;  $\triangle NMQ \equiv \triangle NPQ$  (I.C.)  $\Rightarrow MQ \equiv PQ$ ; b)  $\triangle MQN \equiv \triangle PQN \Rightarrow QN$  bisectoarea  $\sphericalangle MQP$ . **26.** a)  $\triangle MNQ \equiv \triangle PNQ$  (L.L.L.)  $\Rightarrow \sphericalangle MQN \equiv \sphericalangle PQN$  și  $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PNQ$ ; b) Din congruența de la punctul a)  $\Rightarrow \sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$ ; c)  $\triangle MNP$  isoscel (ipoteză) ( $MN = PN$ ). Cum  $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PNQ \Rightarrow (QN$  bisectoarea  $\sphericalangle MNP \Rightarrow NQ$  înălțime  $\Rightarrow NQ \perp MP$ .

## 2. Paralelogramul

**2.** 16 cm. **3.** 31 cm. **4.** 144 cm. **5.** 60 cm. **6.**  $MR \equiv QS = a$  și  $RQ = MS = b$ ;  $2(a + b) = 36,8 \Rightarrow a + b = 18,4$ ;  $\triangle RNQ$  și  $\triangle SQP$  echilaterale  $\Rightarrow MN = a + b = 18,4$  cm  $\Rightarrow \mathcal{P}_{MNP} = 3(a + b) = 55,2$  cm. **7.** a)  $\sphericalangle A = 36^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 72^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 108^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 144^\circ$ ; b)  $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = 72^\circ \Rightarrow \triangle AED$  isoscel; c) unghiurile alăturate sunt suplementare, deci au laturile paralele două câte două. **8.**  $BC = 6$  cm. **9.**  $AB = 32$  cm. **10.**  $\mathcal{P}_{ABCD} = 48$  cm. **11.** a)  $\sphericalangle A = 80^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 100^\circ$ ; b)  $\sphericalangle A = 72^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 108^\circ$ ; c)  $\sphericalangle B = 105^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 75^\circ$ ; d)  $\sphericalangle C = 72^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 108^\circ$ . **12.**  $AD \perp AC$ ;  $DC = 2AD \Rightarrow \sphericalangle ACD = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle BCD = 120^\circ$ . **13.** Se demonstrează că  $\triangle ADB \equiv \triangle EDC$  (U.L.U.)  $\Rightarrow AD \equiv ED$ , cum  $BD \equiv CD$  (ipoteză)  $\Rightarrow ABEC$  paralelogram. **14.** Se demonstrează că  $\triangle NBQ \equiv \triangle PAQ$  (I.U.)  $\Rightarrow BQ \equiv AQ$ , cum  $NQ \equiv PQ$  (ipoteză)  $\Rightarrow BNAP$  paralelogram. **15.** a)  $\sphericalangle A = 45^\circ$ ;  $\sphericalangle B = 75^\circ$ ;  $\sphericalangle C = 105^\circ$ ;  $\sphericalangle D = 135^\circ$ ; b) Se arată că din  $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ \Rightarrow DC \parallel BE$  și cum  $DE \parallel BC \Rightarrow BCDE$  paralelogram. **16.**  $D = \text{sim}_O A \Rightarrow AO = OD$ , cum  $BO \equiv CO \Rightarrow ABDC$  paralelogram. **17.** Dacă  $ABCD$  convex cu  $AB \parallel CD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$  și  $AO \equiv CO$ , se arată că  $\triangle AOB \equiv \triangle COD$  (U.L.U.)  $\Rightarrow AB \equiv CD$ , deci  $ABCD$  este paralelogram. **18.**  $\triangle ABC$  ( $AB \equiv AC$ ) și  $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM \Rightarrow BM \equiv CM$ ; cum  $DM \equiv EM$  (ipoteză)  $\Rightarrow BDCE$  paralelogram  $\Rightarrow BE \parallel CD$ . **19.** a)  $DC \parallel AB \Rightarrow DN \parallel MB$  și  $DC \equiv AB \Rightarrow DN \equiv MB$ , deci  $MBND$  paralelogram; b)  $MBND$  paralelogram, cu  $MN \cap BD = \{E\} \Rightarrow E \in MN$  și  $E \in BD$  astfel încât  $BE \equiv DE$ ; cum  $BO \equiv DO$  (ipoteză)  $\Rightarrow O = E$  (coincid)  $\Rightarrow O \in MN \Rightarrow M, O, N$  coliniare. **20.** a)  $BM \equiv DN$  (ipoteză), cum  $BC \equiv AD \Rightarrow CM \equiv AN$ ; cum  $CM \parallel AN$  (ipoteză)  $\Rightarrow AMCN$  paralelogram; b)  $AMCN$  paralelogram  $\Rightarrow AC \cap MN = \{E\} \Rightarrow E \in MN$  și  $E \in AC$  astfel încât  $AE \equiv EC$ , dar și  $AO \equiv CO$  (ipoteză)  $\Rightarrow O = E$  (coincid)  $\Rightarrow M, O, N$  coliniare. **21.**  $DN \perp AC$  și  $BM \perp AC \Rightarrow DN \parallel BM$  (1);  $\triangle AND \equiv \triangle CMB$  (I.U.)  $\Rightarrow DN \equiv BM$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow BMDN$  paralelogram. **22.**  $AB \equiv CD$  și  $AM \equiv CN \Rightarrow MB \equiv DN$  (1);  $AB \parallel CD \Rightarrow DN \parallel MB$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow BNDM$  paralelogram. **23.**  $\triangle EBH \equiv \triangle FDG$  (L.U.L.)  $\Rightarrow EH \equiv FG$  (1);  $\triangle GAE \equiv \triangle HCF$  (L.U.L.)  $\Rightarrow GE \equiv FH$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow EHFG$  paralelogram. **24.**  $\triangle MBN \equiv \triangle PDQ$  (L.U.L.)  $\Rightarrow MN = PQ$  (1) și  $\triangle QAM \equiv \triangle NCP$  (L.U.L.)  $\Rightarrow QM \equiv PN$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow MNPQ$  paralelogram. **25.**  $\triangle ADA' \equiv \triangle CBC'$  (U.L.U.)  $\Rightarrow AA' \equiv CC'$  (1);  $\triangle ABC \equiv \triangle CDA'$  (L.U.L.)  $\Rightarrow A'C \equiv AC'$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow AA'CC'$  paralelogram. **26.** Fie  $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow OB \equiv OD$  (1) și  $OA \equiv OC$ ; cum  $AM \equiv CN \Rightarrow OM \equiv ON$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow BNDM$  paralelogram. **27.** Fie  $MN \cap PQ = \{O\}$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ ;  $\triangle MOB \equiv \triangle NOD$  (U.L.U.)  $\Rightarrow OM \equiv ON$  (1);  $\triangle POD \equiv \triangle QOB$  (U.L.U.)  $\Rightarrow OP \equiv OQ$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow MQNP$  paralelogram. **28.** Fie  $AC \cap BD = \{O\}$ ;  $\triangle ANB \equiv \triangle CQD$  (L.U.L.)  $\Rightarrow AB \equiv CD$  (1);  $\triangle AMD \equiv \triangle CPB$  (L.U.L.)  $\Rightarrow AD \equiv BC$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow ABCD$  paralelogram; cum  $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow OA \equiv OC$  și  $OB \equiv OD$ . **29.**  $ABCD$  paralelogram  $\Rightarrow BC \parallel AD$  și  $BC \equiv AD$ ;  $ADEF$  paralelogram  $\Rightarrow EF \parallel AD$  și  $EF \equiv AD$ . Deci  $BC \parallel EF$  și  $BC \equiv EF$ , de unde  $BCEF$  paralelogram  $\Rightarrow CE \equiv BF$ . Cum  $\triangle BAF \equiv \triangle CDE$  (L.L.L.)  $\Rightarrow \sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle BAF$ . **30.** a)  $AM \equiv MC$  (ipoteză) și  $BM \equiv MD$  (ipoteză)  $\Rightarrow ABCD$  paralelogram  $\Rightarrow AB \equiv DC$ ; b)  $ABCD$  paralelogram  $\Rightarrow AB \parallel$

$GF$  este linie mijlocie  $\Rightarrow GF \parallel AC$  și  $GF = \frac{AC}{2}$ . Deci  $DE \equiv GF$  (1); b) Din  $DE \parallel AC$  și  $GF \parallel AC \Rightarrow DE \parallel GF$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow DEFG$  paralelogram (3).  $H$  – ortocentru  $\Rightarrow BH$  înălțime  $\Rightarrow BH \perp AC$ . În  $\triangle ABH$ :  $GD$  este linie mijlocie  $\Rightarrow GD \parallel BH$ . Cum  $BH \perp AC$  și  $AC \parallel DE \Rightarrow BH \perp DE \Rightarrow GD \perp DE \Rightarrow \sphericalangle GDE = 90^\circ$  (4). Din (3) și (4)  $\Rightarrow DEFG$  este dreptunghi. **39.** Fie  $M \in (AD)$  și  $N \in (BC)$  astfel încât  $AM \equiv MD$  și  $BN \equiv CN$ . Deci, în triunghiurile dreptunghice  $\triangle AED$  și  $\triangle BFC$ , rezultă că  $EM = AM = MD$  și  $FN = BN = CN$ . De aici rezultă că  $EM \parallel AB$  (1) și  $FN \parallel CD$  (2). Cum  $MN \parallel AB$  (3), atunci din relațiile (1), (2), (3) conform axiomei paralelelor rezultă că dreptele  $ME$  și  $NF$  coincid, deci punctele  $M, E, F, N$  sunt coliniare.

## 5. Rombul

**2.**  $\triangle ABD$  echilateral  $\Rightarrow AB = AD = BD = 12$  cm  $\Rightarrow \mathcal{P}_{ABCD} = 48$  cm. **3.**  $\triangle MNO$ : Conform T<sub>30-60-90</sub> rezultă  $MN = 2NO \Rightarrow NQ = 12$  cm  $\Rightarrow \mathcal{P}_{MNPQ} = 48$  cm. **4.** 10 cm. **5.**  $\sphericalangle BAD = 60^\circ \Rightarrow$  în  $\triangle ABD$  avem  $AB = AD = BD = 8$  cm;  $\mathcal{P} = 32$  cm. **6.** 12 cm. **7.**  $\triangle ABC$  echilateral  $\Rightarrow AB = BC = AC$ ;  $\triangle ADC$  echilateral  $\Rightarrow AD = DC = AC \Rightarrow AB = BC = CD = AD \Rightarrow ABCD$  romb. **8.**  $\triangle ABC$  isoscel ( $AB = AC$ ) și  $AD$  bisectoarea  $\sphericalangle BAC \Rightarrow AD$  înălțime și mediană. Cum  $AD = DE$  (ipoteză)  $\Rightarrow ABCD$  paralelogram, dar  $AB = AC \Rightarrow ABEC$  romb. **9.**  $ABCD$  romb;  $BD < AC$ ;  $\mathcal{P} = 4AB \Rightarrow AB = BD = 12,5$  cm  $\Rightarrow \triangle ABD$  echilateral  $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 120^\circ$ . **10.**  $\mathcal{P} = 72$  cm. **11.** Fie rombul  $ABCD$  și punctele  $E, F, G, H$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD$ , respectiv  $AD$ . Se arată că  $EF$  și  $HG$  sunt linii mijlocii astfel încât  $EF \parallel HG$  și  $EF \equiv HG$ . Deci  $EFHG$  paralelogram. Dar  $HG \parallel AC$  și  $HE \parallel BD$ , rezultă că  $HG \perp HE$ , deci  $EFHG$  dreptunghi. **12.** Se arată că  $\triangle ABN$  isoscel și  $BM$  bisectoare, rezultă că  $AM \equiv MN$  și din  $\triangle AMB \equiv \triangle NMP$  rezultă că  $AB \equiv NP$ . **13.** Se arată că  $\triangle ANDQ$  isoscel și  $DE$  înălțime, atunci  $NE \equiv EQ$  și din  $\triangle EDQ \equiv \triangle EFN$  rezultă că  $DQ \equiv NF$ . **14.**  $BEDF$  este paralelogram cu diagonalele perpendiculare  $\Rightarrow BEDF$  romb. **15.**  $BCDE$  este paralelogram cu diagonalele perpendiculare;  $\mathcal{P}_{BCDF} = 41,6$  cm. **16.**  $DM$  este mediană în  $\triangle ADB$  dreptunghic  $\Rightarrow DM \equiv NB$ . **17.** a) Se arată că rombul este format din două triunghiuri echilaterale, deci rombul are unghiurile de  $60^\circ$  și  $120^\circ$ ; b)  $30^\circ$  și  $60^\circ$ . **18.** Perimetrul rombului este de 32 cm. **19.** Se arată că  $AEDF$  este paralelogram și că  $\triangle AED$  este isoscel. **20.** Se arată că  $AMND$  și  $BCNM$  sunt dreptunghiuri care au diagonalele congruente. **21.**  $MD$  și  $DN$  linii mijlocii în  $\triangle ABC$ , respectiv,  $\triangle ACB$ . Cum  $MD \parallel AC$  și  $MD = \frac{AC}{2}$ , iar  $DN \parallel AB$  și  $DN = \frac{AB}{2}$ , avem  $AMDN$  paralelogram. Din  $AB \equiv AC$  (ipoteză) avem  $DM \equiv DN$ , de unde  $AMDN$  romb. **22.** Fie  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD, DA$ . Cum  $MN$  este linie mijlocie în  $\triangle ABC$ ,  $MN \parallel AC$ , iar  $PQ$  este linie mijlocie în  $\triangle ADC$ ,  $PQ \parallel AC$ , avem  $MN \parallel PQ$ . În plus,  $MN = \frac{AC}{2}$ . Analog,  $MQ \parallel PN$  și  $MQ = \frac{BD}{2}$ . Avem  $MNPQ$  paralelogram și cum  $AC = BD$ , rezultă că  $MNPQ$  este romb. **23.** Se arată că patrulaterul  $MNPQ$  este romb, deoarece laturile sale sunt linii mijlocii în triunghiurile din care fac parte. Deoarece  $\triangle BOC$  este echilateral, atunci  $AC = BD = 32$  cm și  $\mathcal{P}_{MNPQ} = 64$  cm. **24.** Punctele  $A, D, E$  sunt coliniare. În  $\triangle AMC$  dreptunghic,  $MO$  este mediană. **25.** a) Se arată că  $\sphericalangle AGE = \sphericalangle AEG = \sphericalangle B + \frac{\sphericalangle C}{2}$ ; b) Se folosește proprietatea punctelor de pe bisectoare. Deci,  $EF \equiv AE \equiv AG$  și cum  $EF \parallel AG \Rightarrow AEEFG$  romb. **26.** Dacă  $\sphericalangle A = 60^\circ$  și  $AB \equiv AD \Rightarrow \triangle ABD$  echilateral  $\Rightarrow DM \perp AB$ . Analog se arată că  $BN \perp DC$ . **27.**  $\triangle BNC \equiv \triangle DNQ \Rightarrow BC \equiv DQ$  și  $\triangle AMB \equiv \triangle DMP \Rightarrow AB \equiv DP$ . Rezultă că  $ACQP$  are diagonalele congruente și se taie în părți congruente, deci este dreptunghi. **28.**  $ABCD$  – ortodiagonal ( $AC \perp BD$ ) și  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD$  și  $AD$ , rezultă că laturile patrulaterului obținut sunt linii mijlocii în triunghiurile din care fac parte și sunt paralele cu diagonalele patrulaterului dat. Deci patrulaterul obținut este dreptunghi. **29.** În  $\triangle ABC$ :  $EF$  linie

## Cuprins

### RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale	
Algebră .....	5
Geometrie .....	11

### ALGEBRĂ

#### Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

<b>Rădăcina pătrată</b> .....	14
1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect .....	14
<i>Test de autoevaluare</i> .....	19
2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ .....	21
<i>Test de autoevaluare</i> .....	27
<b>Mulțimea numerelor reale</b> .....	29
1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări .....	29
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	34
2. Reguli de calcul cu radicali .....	35
2.1. Produsul radicalilor .....	35
2.2. Câtul radicalilor .....	35
2.3. Scoaterea factorilor de sub radical .....	36
2.4. Introducerea factorilor sub radical .....	37
3. Operații cu numere reale .....	39
<i>Test de autoevaluare</i> .....	49
4. Raționalizarea numitorului unei fracții .....	51
Exerciții recapitulative. Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor .....	60
5. Formule de calcul prescurtat .....	64
6. Media geometrică a două numere reale nenegative .....	66
Exerciții recapitulative. Media aritmetică și media geometrică a numerelor reale .....	69
7. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană .....	70
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	71
<i>Test de autoevaluare</i> .....	75
8. Ecuații de forma $x^2 = a$ , $a \in \mathbb{R}$ .....	77
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană .....	80
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	81

#### PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR .....

84

### GEOMETRIE

#### Capitolul I. PATRULATERE

1. Patrulater convexe .....	87
2. Paralelogramul .....	89
<i>Test de autoevaluare</i> .....	93
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	95



3. Linia mijlocie în triunghi.....	96
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	99
4. Dreptunghiul .....	100
<i>Test de autoevaluare</i> .....	103
5. Rombul.....	105
<i>Test de autoevaluare</i> .....	107
6. Pătratul .....	109
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	111
<i>Test de autoevaluare</i> .....	113
7. Centrul de simetrie și axe de simetrie pentru poligoanele studiate.....	115
8. Trapezul.....	117
9. Linia mijlocie în trapez .....	119
<i>Test de autoevaluare</i> .....	121
10. Aria triunghiului și aria patrulaterului.....	123
<i>Test de autoevaluare</i> .....	129
11. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	131
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	132
<b>Capitolul II. CERCUL</b>	
Cercul .....	134
1. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc.....	136
2. Triunghi și patrulater înscrise într-un cerc .....	140
3. Poligoane regulate înscrise într-un cerc .....	143
4. Lungimea cercului și aria discului.....	145
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	146
<i>Test de autoevaluare</i> .....	149
<b>MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA FINALĂ</b> .....	151
<b>TESTE RECAPITULATIVE</b> .....	154
<b>PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR</b> .....	156
<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....	158