Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

7

Ediţia a VIII-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică – algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru – 7 /
Ion Tudor. – Ed. a 8-a. – Pitești : Paralela 45, 2024 –
2 vol.
ISBN 978-973-47-4114-4
Partea 1. – 2024. – ISBN 978-973-47-4115-1
51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Pentru a accesa aplicaţia urmaţi indicaţiile din insertul auxiliarului pe care tocmai l-aţi achiziţionat.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

(0,5p) **1.** Forma zecimală a fracţiei ordinare $\frac{3}{4}$ este:

A. 0,5; B. 0,75; C. 0,65; D. 0,8.

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr natural prim de două cifre este:

A. 10; B. 15; C. 11; D. 13.

(0,5p) **3.** Suma numerelor raţionale pozitive $1\frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{6}$ este egală cu:

A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $\frac{5}{6}$; D. $\frac{3}{4}$.

(0,5p) **4.** Suplementul unghiului cu măsura de 78° este unghiul cu măsura de:

A. 160°; B. 12°; C. 90°; D. 102°.

(0,5p) **5.** Rezultatul calculului $(-1)^{2017} + (-1)^{2018}$ este egal cu:

A. 2; B. –2; C. –1; D. 0.

(0,5p) **6.** Soluţia inecuaţiei $-3x \leq 9$, unde $x \in \mathbb{Z}$, este:

A. {3, 4, 5, ...}; B. {–3,–2, –1, ...}; C. {..., –5, –4, –3}; D. {..., 1, 2, 3}.

(0,5p) **7.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 şi 8 este egal cu:

A. 12; B. 24; C. 48; D. 18.

(0,5p) **8.** Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A şi $\sphericalangle B = 4\sphericalangle C$, atunci măsura unghiului C este egală cu:

A. 60°; B. 30°; C. 18°; D. 45°.

(0,5p) **9.** Calculând 40% din 35 obţinem numărul:

A. 15; B. 40; C. 70; D. 14.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

(0,8p) **1.** Se consideră triunghiul isoscel ABC. Dacă $AB = 10$ cm şi $AC = 4{,}5$ cm, aflaţi BC.

2. Se consideră numărul raţional pozitiv $x = \frac{11}{10} - \left[2\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \frac{5}{2}$.

(0,8p) a) Arătaţi că $x = \frac{4}{15}$.

(0,7p) b) Rotunjiţi la a doua zecimală numărul raţional pozitiv x.

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Citesc și rețin

Definiție: Un număr natural a se numește **pătrat perfect** dacă există un număr natural b, astfel încât $a = b^2$.

Exemple: $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $100 = 10^2$.

Observație: Dacă a, $a \neq 0$, este un număr natural pătrat perfect, atunci există două numere întregi b și $-b$ cu proprietatea că $a = b^2 = (-b)^2$.

Exemple: $1 = 1^2 = (-1)^2$, $4 = 2^2 = (-2)^2$, $9 = 3^2 = (-3)^2$.

Definiție: Rădăcina pătrată a numărului natural pătrat perfect a ($a = b^2$, $b \in \mathbb{Z}$) este numărul natural $|b|$. Notăm $\sqrt{a} = |b|$.

Exemple: $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{19^2} = 19$; $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$.

Observații:

1. Dacă $a = b^2$, $b \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{a} = b$.

2. Dacă $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\sqrt{25}$; b) $\sqrt{81}$.

Soluție:

a) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$; b) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$; b) $\sqrt{\frac{48}{75}}$.

Soluție:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{7^2}{8^2}} = \frac{7}{8}$; b) $\sqrt{\frac{48^{(3}}{75}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \frac{4}{5}$.

3. Determinaţi cardinalul mulţimii $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{n} \le 6\}$.

Soluţie:

$5 < \sqrt{n} \le 6$, deci $25 < n \le 36$, de unde rezultă $A = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$, prin urmare card $A = 11$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $16 = ...$; b) $36 = ...$; c) $49 = ...$; d) $64 = ...$; e) $81 = ...$;
f) $100 = ...$; g) $144 = ...$; h) $196 = ...$; i) $324 = ...$; j) $400 = ...$.

2. Citiţi următoarele propoziţii:

a) $\sqrt{25} = 5$; b) $\sqrt{169} = 13$; c) $\sqrt{361} = 19$; d) $\sqrt{81} = 9$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $\sqrt{14^2} = 14$; $\square$ b) $\sqrt{19^2} = 19$; $\square$ c) $\sqrt{41^2} = 41$; $\square$
d) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; $\square$ e) $\sqrt{(-13)^2} = -13$; $\square$ f) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$. $\square$

4. Calculaţi:

a) $\sqrt{16} = ...$; b) $\sqrt{25} = ...$; c) $\sqrt{36} = ...$; d) $\sqrt{49} = ...$; e) $\sqrt{64} = ...$;
f) $\sqrt{100} = ...$; g) $\sqrt{121} = ...$; h) $\sqrt{144} = ...$; i) $\sqrt{225} = ...$; j) $\sqrt{256} = ...$.

5. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

a) $\sqrt{(-11)^2} = ...$; b) $\sqrt{(-23)^2} = ...$; c) $\sqrt{(-59)^2} = ...$; d) $\sqrt{(-77)^2} = ...$.

6. Determinaţi mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 7\} = ...$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 8\} = ...$;

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 29\} = ...$; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 67\} = ...$.

7. Calculaţi:

a) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$; b) $\sqrt{64} - \sqrt{49}$; c) $\sqrt{36} + \sqrt{81}$; d) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$;
e) $\sqrt{81} - \sqrt{36} = ...$; f) $\sqrt{16} - \sqrt{64} = ...$.

8. Calculaţi:

a) $\left(\sqrt{225} - \sqrt{36}\right) \cdot \sqrt{100}$; b) $\sqrt{121} : \left(\sqrt{25} - \sqrt{256}\right)$; c) $\sqrt{144} : \left(\sqrt{49} - \sqrt{169}\right)$;
d) $\sqrt{196} : \left(\sqrt{64} - \sqrt{100}\right) = ...$.

9. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$; $\square$ b) $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$; $\square$ c) $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$; $\square$ d) $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$. $\square$

Lecţia 7. Adunarea şi scăderea numerelor reale

Citesc şi reţin

Suma numerelor reale x şi y este un număr real unic, notat $\boldsymbol{x+y}$.
Operaţia prin care se obţine suma a două numere reale se numeşte **adunare**.
Proprietăţile adunării:

- comutativitatea: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$;
- asociativitatea: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- 0 este element neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;
- orice număr $a \in \mathbb{R}$ are un opus $-a \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0$.

Diferenţa numerelor reale x şi y este un număr real unic, notat $x - y$, şi care reprezintă suma dintre x şi opusul lui y, adică $x - y = x + (-y)$.
Reguli de calcul:

- $a\sqrt{n} + b\sqrt{n} = (a+b)\sqrt{n}$, $n > 0$;
- $a\sqrt{n} - b\sqrt{n} = (a-b)\sqrt{n}$, $n > 0$;
- $a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{n} + a_3\sqrt{n} + \ldots + a_m\sqrt{n} = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)\sqrt{n}$, $n > 0$.

Cum se aplică?

1. Calculaţi:

a) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$; b) $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$; c) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$.

Soluţie:

a) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \sqrt{2}(3+7) = 10\sqrt{2}$; b) $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}(9-3) = 6\sqrt{5}$;

c) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = \sqrt{7}(2-5) = -3\sqrt{7}$.

2. Calculaţi:

a) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$; b) $2\sqrt{63} - 5\sqrt{28}$; c) $-\sqrt{18} - 3\sqrt{98}$.

Soluţie:

a) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} = 5\sqrt{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{3^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$;

b) $2\sqrt{63} - 5\sqrt{28} = 2\sqrt{3^2 \cdot 7} - 5\sqrt{2^2 \cdot 7} = 6\sqrt{7} - 10\sqrt{7} = -4\sqrt{7}$;

c) $-\sqrt{18} - 3\sqrt{98} = -\sqrt{3^2 \cdot 2} - 3\sqrt{7^2 \cdot 2} = -3\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = -24\sqrt{2}$.

3. Calculaţi: $7\sqrt{24} - 3\sqrt{20} - \sqrt{150} - 2\sqrt{80}$.

Soluţie:

$7\sqrt{24} - 3\sqrt{20} - \sqrt{150} - 2\sqrt{80} = 7\sqrt{2^2 \cdot 6} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5^2 \cdot 6} - 2\sqrt{4^2 \cdot 5} = 14\sqrt{6} -$
$- 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} - 8\sqrt{5} = \sqrt{6}(14-5) + \sqrt{5}(-6-8) = 9\sqrt{6} - 14\sqrt{5}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Calculaţi:

a) (–3) + 5; b) 7 + (–9); c) (–2) + (–6); d) (–4) + (–5);
e) 21 + (–17); f) (–19) + 12; g) (–12) + (–27); h) (–14) + (–35);
i) (–7) – 12; j) (–6) – 18; k) (–4) – (–7); l) (–8) – (–6);
m) 18 – (–20); n) 14 – (–21); o) (–37) – (– 9); p) (–41) – (–5).

g)

o)

2. Calculaţi:

a) $\frac{9}{4}+\frac{3}{2}$; b) $\frac{5}{6}-\frac{4}{3}$; c) $\frac{7}{6}+\frac{5}{4}$; d) $\frac{7}{4}-\frac{8}{5}$;

e) $2\frac{3}{8}+\left(-\frac{13}{6}\right)$; f) $\left(-\frac{7}{4}\right)-1\frac{3}{14}$; g) $\left(-\frac{11}{12}\right)-1\frac{4}{9}$; h) $\left(-2\frac{1}{8}\right)+\frac{9}{10}$.

g)

3. Calculaţi:

a) 0,(6) + 1,25; b) 2,(3) – 0,75; c) 0,68 – 1,(6);
d) 1,2(7) – 1,75; e) 1,75 – 0,6(1); f) 0,2(6) – 1,52.

e)

4. Calculaţi:

a) $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ = ...; b) $6\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ = ...; c) $7\sqrt{5}+2\sqrt{5}$ = ...;
d) $5\sqrt{7}+3\sqrt{7}$ = ...; e) $4\sqrt{6}+6\sqrt{6}$ = ...; f) $5\sqrt{5}-2\sqrt{5}$ = ...;
g) $\sqrt{7}-8\sqrt{7}$ = ...; h) $\sqrt{3}-9\sqrt{3}$ = ...; i) $\sqrt{2}-11\sqrt{2}$ = ...;
j) $-6\sqrt{3}-4\sqrt{3}$ = ...; k) $-7\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ = ...; l) $-4\sqrt{2}-9\sqrt{2}$ = ...;
m) $8\sqrt{3}-15\sqrt{3}$ = ...; n) $4\sqrt{5}-17\sqrt{5}$ = ...; o) $2\sqrt{7}-22\sqrt{7}$ = ...

5. Calculaţi:

a) $2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{3}-8\sqrt{3}+2\sqrt{3}$; c) $-\sqrt{5}-23\sqrt{5}+9\sqrt{5}$;
d) $-7\sqrt{6}+2\sqrt{6}+5\sqrt{6}$; e) $-4\sqrt{7}-6\sqrt{7}+7\sqrt{7}$; f) $-2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-12\sqrt{5}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VII-a
Capitolul: Mulţimea numerelor reale
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Suma numerelor $x = 2\sqrt{7}$ şi $y = -9\sqrt{7}$ este egală cu $-7\sqrt{7}$. A F

(7p) **2.** Produsul numerelor $x = 4\sqrt{3}$ şi $y = \sqrt{5}$ este egal cu $4\sqrt{15}$. A F

(7p) **3.** Raţionalizând numitorul raportului $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, obţinem raportul $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Diferenţa numerelor $x = -\sqrt{5}$ şi $y = -\sqrt{125}$ este egală cu ....

(7p) **2.** Câtul numerelor $a = \sqrt{24}$ şi $b = 2\sqrt{3}$ este egal cu ....

(7p) **3.** Cubul numărului $x = -\sqrt{2}$ este egal cu ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Rezultatul calculului $\left[-\sqrt{10} + (-2\sqrt{10})^3\right] : \left|-9\sqrt{2}\right|$ este:

A. $2\sqrt{10}$; B. $-3\sqrt{2}$; C. $-9\sqrt{5}$; D. $3\sqrt{10}$.

(8p) **2.** Valoarea absolută a numărului real $a = 1,(6) \cdot \left(\dfrac{11}{2\sqrt{75}} - \dfrac{8}{\sqrt{48}}\right)$ este egală cu:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; B. $\sqrt{6}$; C. $\sqrt{5}$; D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(8p) **3.** Numărul $a = \left(\dfrac{\sqrt{42}}{2\sqrt{5}} : \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}} - \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \cdot \dfrac{\sqrt{63}}{2\sqrt{5}}\right) : \dfrac{\sqrt{6}}{8}$ aparţine mulţimii:

A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.

La exerciţiile IV. şi V. scrieţi pe fişă rezolvările complete.

(8p) **IV.** Se consideră numărul $a = \left(\sqrt{\dfrac{0,2(6)}{1,(3)} : 0,25} - \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\right)^3 : \sqrt{\dfrac{1,(6)}{1,92}}$. Arătaţi că numărul $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$.

V. Se consideră numerele:

$$x = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \text{ şi } y = \left(\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right) : \frac{1}{3}.$$

(8p) a) Arătaţi că $x = \sqrt{2}$.

(8p) b) Arătaţi că $\sqrt{xy} \in \mathbb{N}$.

Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive

Citesc şi reţin

Definiţie: Media geometrică a numerelor reale **pozitive** *a* şi *b* este dată de formula $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.

Teoremă: Dacă a şi b sunt două numere reale pozitive, atunci $m_a(a;\ b) \geq m_g(a;\ b)$. Egalitatea se obţine când $a = b$.

Cum se aplică?

1. Calculaţi media aritmetică şi media geometrică a numerelor 2 şi 8. Comparaţi cele două medii.

Soluţie:

$m_a = \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$; $m_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$; $m_a = 5$ şi $m_g = 4$, prin urmare $m_a > m_g$.

2. Calculaţi media geometrică a numerelor reale:

a) 3,5 şi 4,(6); b) $5\sqrt{35}$ şi $7\sqrt{35}$.

Soluţie:

$$\text{a) } m_g = \sqrt{3{,}5 \cdot 4{,}(6)} = \sqrt{\frac{7}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{14}^7}{3}} = \sqrt{\frac{7}{1} \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{7^2}{3}} = \frac{^{\sqrt{3})}7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{b) } m_g = \sqrt{5\sqrt{35} \cdot 7\sqrt{35}} = \sqrt{35 \cdot \sqrt{35}^2} = \sqrt{35 \cdot 35} = \sqrt{35^2} = 35 .$$

3. Media geometrică a două numere reale pozitive este egală cu 18. Dacă unul dintre numere este $6\sqrt{2}$, aflaţi celălalt număr.

Soluţie:

Notăm cu x numărul necunoscut; $m_g = 18$, deci $\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x} = 18$, prin urmare $\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x}^2 = 18^2$ sau $6\sqrt{2} \cdot x = 324$, deci $x = \dfrac{324}{6\sqrt{2}}$ sau $x = \dfrac{^{\sqrt{2})}54}{\sqrt{2}} = \dfrac{54\sqrt{2}}{2} = 27\sqrt{2}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Încercuiţi litera corespunzătoare soluţiei corecte. Media geometrică a numerelor 12 şi 3 este egală cu:

A. $m_g = \sqrt{12:3} = \sqrt{4} = 2$; B. $m_g = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$.

2. Completaţi tabelul următor:

Numerele	16; 1	1; 25	36; 1	1; 49
Media geometrică				

GEOMETRIE

Capitolul I
PATRULATERUL

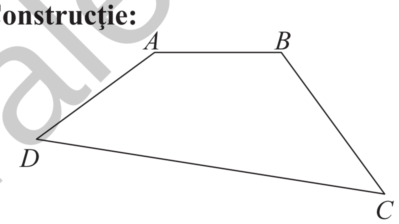
Lecția 1. Patrulaterul convex

Citesc și rețin

Definiție: Numim **patrulater** de vârfuri A, B, C și D reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup$ $\cup\, CD \cup DA$, unde punctele distincte A, B, C și D îndeplinesc condițiile:
– oricare trei dintre ele sunt necoliniare;
– $AB \cap CD = \varnothing$, $BC \cap AD = \varnothing$.
Patrulaterul de vârfuri A, B, C și D se notează $ABCD$.

Definiție: Un **patrulater** se numește **convex** dacă dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate ale acestuia **nu separă** celelalte două vârfuri ale patrulaterului.

Construcție:



Elemente:
a) vârfurile patrulaterului: A, B, C, D;
b) laturile patrulaterului: AB, BC, CD, DA;
c) unghiurile patrulaterului: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$;
d) diagonalele patrulaterului: AC, BD.

Laturile AB și BC, BC și CD etc. se numesc **alăturate**, iar laturile AB și CD, respectiv BC și DA se numesc **opuse**.
Unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ etc. se numesc **alăturate**, iar unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$ se numesc **opuse**.

Proprietăți:
Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu **360°**.
Definiție: Perimetrul patrulaterului convex $ABCD$ este dat de formula:

$$\mathscr{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$

Cum se aplică?

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 73°$ și $\sphericalangle C = 135°$, aflați măsura unghiului D.
Soluție:
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$, deci $60° + 73° + 135° + \sphericalangle D = 360°$ sau $268° + \sphericalangle D = 360°$, de unde rezultă că $\sphericalangle D = 360° - 268°$ și obținem $\sphericalangle D = 92°$.

2. Calculaţi perimetrul patrulaterului convex *DEFG*, cu $DE = 7$ cm, $EF = 5$ cm, $FG = 3$ cm şi $GD = 6$ cm.

Soluţie:

$\mathscr{P}_{DEFG} = DE + EF + FG + GD = 7 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 21 \text{ cm}.$

3. Determinaţi măsurile unghiurilor patrulaterului convex *MNPQ* ştiind că $\sphericalangle M = 5\sphericalangle P$, $\sphericalangle N = 2\sphericalangle P$ şi $\sphericalangle Q = 4\sphericalangle P$.

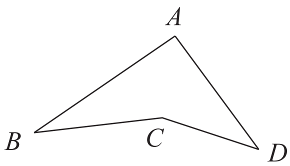
Soluţie:

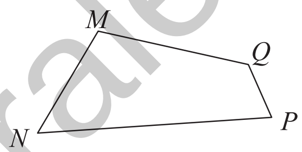
$\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P + \sphericalangle Q = 360°$, deci $5\sphericalangle P + 2\sphericalangle P + \sphericalangle P + 4\sphericalangle P = 360°$, deci $12\sphericalangle P = 360°$, de unde rezultă că $\sphericalangle P = 360° : 12$ şi obţinem $\sphericalangle P = 30°$; $\sphericalangle M = 5 \cdot 30° = 150°$; $\sphericalangle N = 2 \cdot 30° = 60°$ şi $\sphericalangle Q = 4 \cdot 30° = 120°$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Completaţi spaţiul punctat cu răspunsul corect. Dintre patrulaterele *ABCD* şi *MNPQ* reprezentate în figurile următoare, cel convex este patrulaterul ....

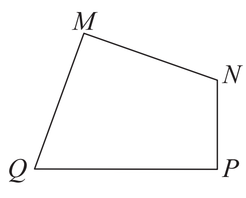




2. Construiţi patrulaterul convex *ABCD* şi notaţi cu *O* punctul de intersecţie al diagonalelor acestuia.

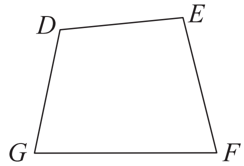
3. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex *MNPQ*. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sphericalangle M$ şi $\sphericalangle N$ sunt alăturate;
b) $\sphericalangle P$ şi $\sphericalangle Q$ sunt opuse;
c) $\sphericalangle N$ şi $\sphericalangle Q$ sunt alăturate;
d) $\sphericalangle M$ şi $\sphericalangle P$ sunt opuse.



4. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex *DEFG*. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) laturile *DE* şi *FG* sunt alăturate;
b) laturile *DG* şi *FG* sunt opuse;
c) laturile *DE* şi *EF* sunt alăturate;
d) laturile *DG* şi *EF* sunt opuse.

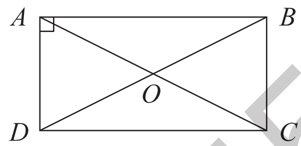


Lecţia 5. Dreptunghiul

Citesc şi reţin

Definiţie: Paralelogramul care are un unghi drept se numeşte **dreptunghi**.

Construcţie:



Proprietăţi:

Teorema 1: Cele patru unghiuri ale unui dreptunghi sunt unghiuri drepte.

Teorema 2: Diagonalele dreptunghiului sunt congruente.

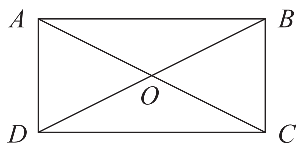
Teorema 3: Dacă într-un paralelogram diagonalele sunt congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.

Cum se aplică?

1. În dreptunghiul $ABCD$, notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Dacă $AB = 8$ cm şi $\mathscr{P}_{AOB} = 18$ cm, aflaţi $AC + BD$.

Soluţie:

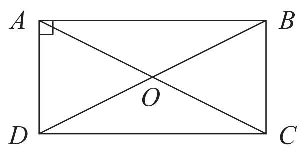
$\mathscr{P}_{AOB} = 18$ cm, deci $AB + AO + OB = 18$ cm sau 8 cm $+ AO + OB = 18$ cm, aşadar $AO + OB = 10$ cm. Deoarece $AC \equiv BD$, rezultă că $AO \equiv OB$ şi $AO + OB = AC$, prin urmare $AC = 10$ cm, şi obţinem $AC + BD = 20$ cm.



2. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $CAD = 43°$, determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle COD$.

Soluţie:

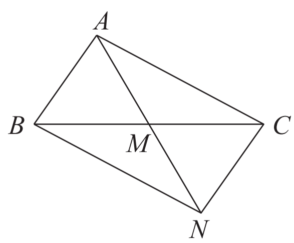
$ABCD$ este dreptunghi, deci $AO \equiv DO$, prin urmare $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle ODA$. În ΔOAD avem $\sphericalangle O + \sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$, aşadar $43° + 43° + \sphericalangle O = 180°$, de unde obţinem $\sphericalangle O = 94°$; $\sphericalangle COD = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOD = 180° - 94° = 86°$.



3. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ construim mediana AM, $M \in BC$. Arătaţi că $AM = \dfrac{BC}{2}$.

Soluţie:

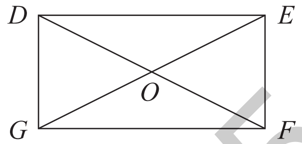
Notăm cu N simetricul punctului A faţă de punctul M. Deoarece $AM \equiv MN$, $BM \equiv MC$ şi $\sphericalangle BAC = 90°$, rezultă că patrulaterul $ABNC$ este dreptunghi, deci $AN = BC$, sau $2AM = BC$, prin urmare $AM = \dfrac{BC}{2}$.



Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $DEFG$ în care am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

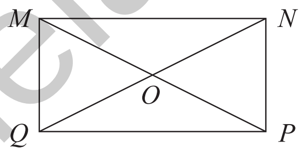


a) $\sphericalangle EDG = 90°$; ☐ b) $DE \equiv GF$; ☐
c) $DG \not\equiv EF$; ☐ d) $DF \equiv EG$. ☐

2. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Ştiind că AD = 7 cm şi CD = 11 cm, completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

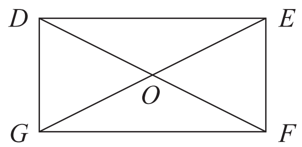
a) AB = ...; b) BC = ...

3. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $MNPQ$ în care am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:



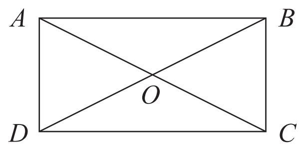
a) MP = 5 cm, atunci NQ = ...;
b) NQ = 7 cm, atunci MP = ...;
c) MP = 6 cm, atunci NO = ...;
d) QO = 4 cm, atunci MP = ...

4. În figura alăturată am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $DEFG$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:



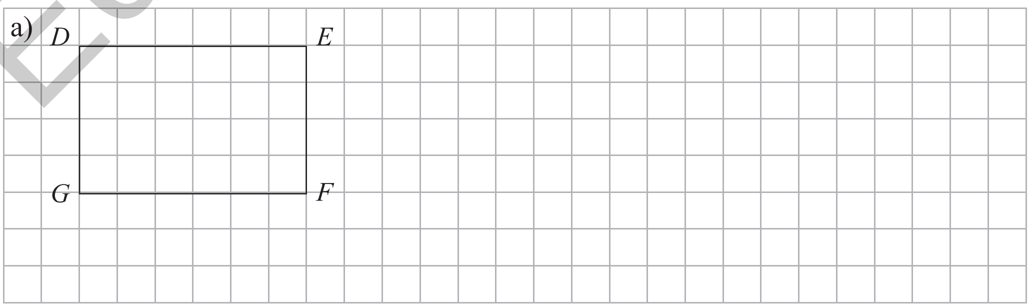
a) ΔDOE este isoscel; ☐ b) ΔEOF este isoscel; ☐
c) ΔFOG este isoscel; ☐ d) ΔGOD este isoscel. ☐

5. În figura alăturată am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:



a) Dacă AC = 10 cm şi AB = 7 cm, atunci $\mathcal{P}_{AOB}$ = ...
b) Dacă BD = 14 cm şi BC = 5 cm, atunci $\mathcal{P}_{AOD}$ = ...

6. Calculaţi perimetrul dreptunghiului $DEFG$, ştiind că:
a) DE = 15 cm şi EF = 8 cm; b) DG = 9 cm şi GF = 16 cm.



Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Ştiind că:
a) $AC = 7$ cm, aflaţi BO; b) $CO = 5$ cm, aflaţi BD.

(1p) **2.** Se consideră rombul $DEFG$, cu $DE = 5$ cm şi $\sphericalangle EDG = 70°$. Aflaţi:
a) $\mathcal{P}_{DEFG}$; b) $\sphericalangle DEG$.

(1p) **3.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor pătratului $ABCD$. Calculaţi $\sphericalangle BAC + \sphericalangle COD$.

(1p) **4.** În pătratul $ABCD$, notăm cu M, N, P şi Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA. Arătaţi că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

5. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle BOC$, aflaţi:
(1p) a) $\sphericalangle BOC$; *(1p)* b) $\sphericalangle BAC$.

6. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor rombului $ABCD$ cu perimetrul de 28 cm şi $\sphericalangle B = 2\sphericalangle A$. Construim $OE \perp AD$, $E \in AD$. Calculaţi:
(1p) a) $\sphericalangle A$; *(1p)* b) BD; *(1p)* c) AE.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră rombul $ABCD$, cu $AB = 4$ cm şi $\sphericalangle ABD = 54°$. Aflaţi:
a) BC; b) $\sphericalangle DBC$.

(1p) **2.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor pătratului $ABCD$, care are perimetrul de 20 cm. Aflaţi:
a) $\sphericalangle BDC$; b) AD.

(1p) **3.** Arătaţi că diagonalele dreptunghiului $DEFG$ sunt congruente.

(1p) **4.** Pe cercul $\mathcal{C}(O)$ considerăm punctele A, B şi C, astfel încât patrulaterul $OABC$ este romb. Determinaţi măsurile unghiurilor rombului $OABC$.

5. Se consideră rombul $ABCD$ cu $\sphericalangle B = 3\sphericalangle A$. Mediatoarele laturilor AB şi CD intersectează diagonala AC în punctele E, respectiv F.
(1p) a) Aflaţi măsurile unghiurilor rombului $ABCD$.
(1p) b) Arătaţi că patrulaterul $BEDF$ este un pătrat.

6. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\mathcal{P}_{ADC} = 48$ cm, $\mathcal{P}_{ABO} = 36$ cm şi $\mathcal{P}_{BCO} = 32$ cm, aflaţi:
(1p) a) BC; *(1p)* b) AB; *(1p)* c) BD.

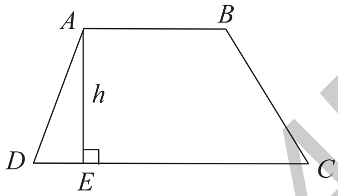
Lecţia 8. Trapezul. Trapezul isoscel

Citesc şi reţin

Definiţie: Patrulaterul care are două laturi paralele şi celelalte două laturi neparalele se numeşte **trapez**.

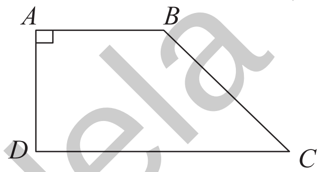
Laturile paralele ale unui trapez se numesc **bazele** trapezului.

Construcţie:



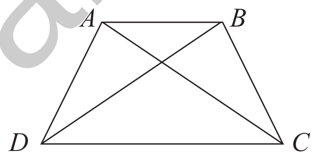
Definiţie: Trapezul care are un unghi drept se numeşte **trapez dreptunghic**.

Construcţie:



Definiţie: Trapezul care are laturile neparalele congruente se numeşte **trapez isoscel**.

Construcţie:



Definiţie: Segmentul determinat de punctele de intersecţie dintre bazele trapezului şi o perpendiculară comună a acestora se numeşte **înălţimea** trapezului. Lungimea înălţimii se notează cu h.

Proprietăţi (trapezul isoscel):

Teorema 1: Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate bazei mari şi unghiurile alăturate bazei mici sunt, respectiv, congruente.

Teorema 2: Dacă unghiurile alăturate unei baze a unui trapez sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Teorema 3: Diagonalele trapezului isoscel sunt congruente.

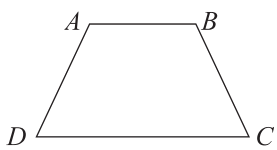
Teorema 4: Dacă un trapez are diagonalele congruente, atunci trapezul este isoscel.

Cum se aplică?

1. Aflaţi măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, dacă $\sphericalangle A = 3\sphericalangle D$.

Soluţie:

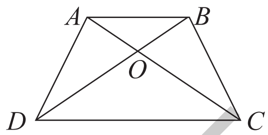
Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ (interne de aceeaşi parte a secantei AD), deci $3\sphericalangle D + \sphericalangle D = 180°$, de unde rezultă că $\sphericalangle D = 45°$, $\sphericalangle A = 135°$. Aplicăm teorema 1: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$, prin urmare $\sphericalangle B = 135°$ şi $\sphericalangle C = 45°$.



2. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Arătaţi că:

a) $AO \equiv BO$; b) $CO \equiv DO$.

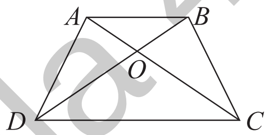
Soluţie:



a) Deoarece $ABCD$ este trapez isoscel avem $AD \equiv BC$ şi $AC \equiv BD$, deci $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$, de unde rezultă că $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle BAO$, prin urmare $AO \equiv BO$; b) $OC = AC - AO$ şi $OD = BD - BO$, de unde rezultă că $CO \equiv DO$.

3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm şi $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, aflaţi AB.

Soluţie:

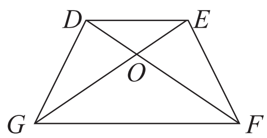


$\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm, deci $AB + BC + CA = 25$ cm sau $AB + BD + DA = 25$ cm (1); $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, deci $AO + OD + DA = 19$ cm, dar în problema precedentă am arătat că $AO \equiv BO$, deci $BD + DA = 19$ cm şi înlocuind în (1) obţinem $AB = 6$ cm.

Ştiu să rezolv

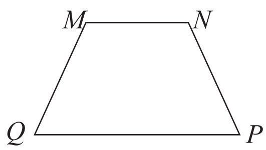
Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $DEFG$ cu $DE \parallel FG$, în care am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:



a) $DE \parallel GF$;	☐	b) $DG \parallel EF$;	☐
c) $DE \equiv GF$;	☐	d) $DG \equiv EF$;	☐
e) $\sphericalangle DGF \equiv \sphericalangle EFG$;	☐	f) $\sphericalangle EDG \equiv \sphericalangle DEF$;	☐
g) $DF \equiv EG$;	☐	h) $DO \equiv FO$.	☐

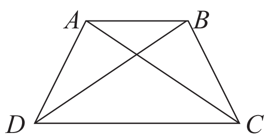
2. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:



a) $MQ = 3{,}5$ cm, atunci NP = ...;

b) $NP = 4{,}7$ cm, atunci MQ = ...

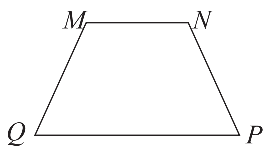
3. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:



a) $AC = 6{,}5$ cm, atunci BD = ...;

b) $BD = 3{,}8$ cm, atunci AC = ...

4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:



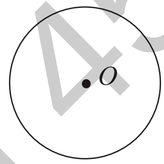
a) $\sphericalangle M = 127°$, atunci $\sphericalangle N$ = ...;

b) $\sphericalangle P = 68°$, atunci $\sphericalangle Q$ = ...

CAPITOLUL II
Cercul

Lecția 12. Unghi înscris în cerc

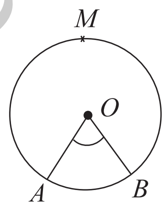
Citesc şi reţin



Definiţie: Numim **cerc** de centru O şi rază R, notat $\mathscr{C}(O, R)$, mulţimea punctelor din plan situate la distanţa R faţă de punctul O.

Definiţie: Măsura unui cerc este egală cu 360°.

Definiţie: Un unghi care are vârful în centrul unui cerc se numeşte **unghi la centru**. (În figura alăturată, unghiul $\sphericalangle AOB$ este unghi la centru pentru cercul respectiv.)



Definiţii:

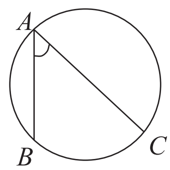
1. Mulţimea punctelor de pe un cerc situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ se numeşte **arcul mic** AB, notat $\overset{\frown}{AB}$.
2. Mulţimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului $\sphericalangle AOB$ se numeşte **arcul mare** AB, notat $\overset{\frown}{AMB}$, unde M este un punct de pe cerc situat în exteriorul unghiului $\sphericalangle AOB$ (pentru ambele arce, punctele A şi B se numesc **capete** sau **extremităţi**).

Observaţie: Măsura arcului de cerc de extremităţi X şi Y se notează $\overset{\frown}{XY}$.

Definiţii:

1. Dacă $\overset{\frown}{AB}$ este un arc mic, atunci $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB$.
2. Dacă $\overset{\frown}{AMB}$ este un arc mare, atunci $\overset{\frown}{AMB} = 360° - \sphericalangle AOB$.

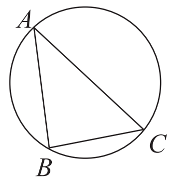
Definiţie: Două arce $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{CD}$ ale aceluiaşi cerc (sau din cercuri congruente) se numesc **congruente**, dacă $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$; se notează $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.



Definiţie: Un unghi cu vârful pe cerc şi ale cărui laturi sunt două coarde ale cercului se numeşte **unghi înscris în cerc**.

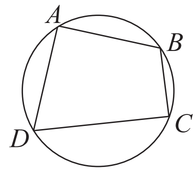
Teoremă: Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale:

$$\sphericalangle BAC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}.$$



Definiţie: Un triunghi se numeşte **înscris într-un cerc** dacă vârfurile sale aparţin cercului respectiv. În acest caz, spunem că cercul este **circumscris triunghiului**, centrul său fiind punctul de concurenţă a mediatoarelor laturilor triunghiului.

Definiţie: Un patrulater se numeşte **patrulater inscriptibil**, dacă există un cerc care conţine vârfurile acestuia. Cercul respectiv se numeşte **cercul circumscris patrulaterului**.



Teoremă: Patrulaterul care are unghiurile opuse suplementare este inscriptibil.

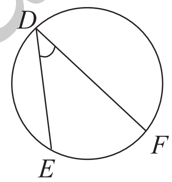
Teoremă: Patrulaterul în care diagonalele formează cu două laturi opuse ale acestuia unghiuri congruente este inscriptibil.

Cum se aplică?

1. Pe un cerc se consideră punctele E şi F şi punctul D pe arcul mare de extremităţi E şi F.

a) Dacă $\overset{\frown}{EF} = 56°$, aflaţi $\sphericalangle EDF$. b) Dacă $\sphericalangle EDF = 32°$, aflaţi $\overset{\frown}{EF}$.

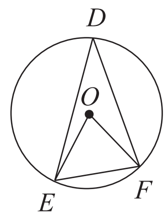
Soluţie:



a) $\sphericalangle EDF = \frac{\overset{\frown}{EF}}{2} = \frac{56°}{2} = 28°$; b) $\sphericalangle EDF = \frac{\overset{\frown}{EF}}{2}$, deci $32° = \frac{\overset{\frown}{EF}}{2}$, de unde rezultă că $\overset{\frown}{EF} = 32° \cdot 2$ şi obţinem $\overset{\frown}{EF} = 64°$.

2. Pe cercul $\mathscr{C}(O,\ 2\sqrt{3}\text{ cm})$ se consideră punctele D, E şi F. Ştiind că $\sphericalangle EDF = 30°$, calculaţi lungimea coardei EF.

Soluţie:

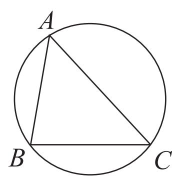


$\sphericalangle EDF = \frac{\overset{\frown}{EF}}{2}$ sau $30° = \frac{\overset{\frown}{EF}}{2}$, de unde rezultă că $\overset{\frown}{EF} = 60°$, prin urmare $\sphericalangle EOF = 60°$, deci ΔEOF este echilateral, prin urmare $EF = R = 2\sqrt{3}$ cm.

3. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, ştiind că măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ şi $\overset{\frown}{CA}$ sunt direct proporţionale cu numerele 10, 11 şi 19.

Soluţie:

Din ipoteză avem $\frac{\overset{\frown}{AB}}{10} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{11} = \frac{\overset{\frown}{CA}}{19} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA}}{10+11+19} = \frac{360°}{40} = 9°$, deci $\frac{\overset{\frown}{AB}}{10} = 9°$, de unde rezultă că $\overset{\frown}{AB} = 90°$ şi analog obţinem $\overset{\frown}{BC} = 99°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 171°$; $\sphericalangle A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{99°}{2} = 49°30'$, $\sphericalangle B = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \frac{171°}{2} = 85°30'$, $\sphericalangle C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$.

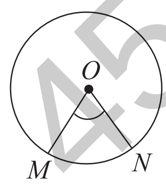


Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.
Măsura cercului este egală cu:
A. 100°; B. 180°; C. 360°; D. 400°.

2. În figura alăturată este reprezentat cercul $\mathscr{C}(O)$ şi unghiul la centru $\sphericalangle MON$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:



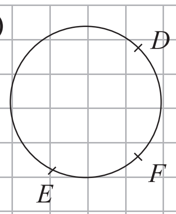
a) Dacă $\sphericalangle MON = 54°$, atunci $\overset{\frown}{MN}$ = ...

b) Dacă $\overset{\frown}{MN} = 48°$, atunci $\sphericalangle MON$ = ...

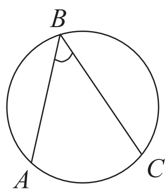
3. Pe un cerc se consideră punctele E şi F, iar pe arcul mare de extremităţi E şi F se consideră punctul D. Aflaţi $\overset{\frown}{EF}$ şi $\overset{\frown}{EDF}$, dacă:

a) $\overset{\frown}{EDF} = 5\overset{\frown}{EF}$; b) $\overset{\frown}{EDF} = 4\overset{\frown}{EF}$.

b)



4. În figura alăturată este reprezentat un cerc şi unghiul $\sphericalangle ABC$ înscris în cercul respectiv. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

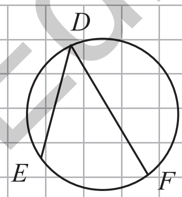


a) $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{3}$; ☐ b) $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$. ☐

5. Pe un cerc se consideră punctele E şi F, iar punctul D este situat pe arcul mare de extremităţi E şi F. Aflaţi $\sphericalangle EDF$, dacă:

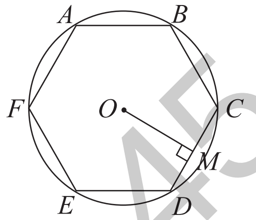
a) $\overset{\frown}{EF} = 40°$; b) $\overset{\frown}{EF} = 74°$; c) $\overset{\frown}{EF} = 96°$.

c)



Lecția 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc

Citesc şi reţin



Definiţie: Un poligon care are toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente se numeşte **poligon regulat**.

Teoremă: Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc. Centrul cercului se numeşte **centrul poligonului regulat**.

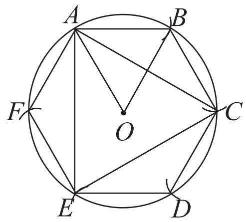
Lungimea laturii poligonului regulat cu n laturi se notează l_n.

Definiţie: Segmentul construit din centrul unui poligon regulat, perpendicular pe o latură a acestuia, se numeşte **apotema poligonului regulat**.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este dată de formula $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

Teoremă: Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu n laturi, notată u_n, este dată de formula $u_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

Construcţia unui poligon regulat înscris într-un cerc dat
În continuare, prezentăm construcţia cu ajutorul compasului şi al riglei negradate a hexagonului regulat $ABCDEF$ înscris în cercul dat, $\mathscr{C}(O, R)$.



Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$ construim punctul A şi, luând în compas o deschidere egală cu R, construim arcul $\overset{\frown}{AB}$. ΔAOB este echilateral, deci $\overset{\frown}{AB} = 60°$, prin urmare, construind în acelaşi fel arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$ şi $\overset{\frown}{EF}$, cercul a fost împărţit în şase arce de cerc congruente. Cu ajutorul riglei, construim hexagonul regulat $ABCDEF$.
Observaţie: Triunghiul ACE este echilateral, deci această construcţie poate fi utilizată şi pentru construcţia triunghiului echilateral înscris într-un cerc dat.

Cum se aplică?

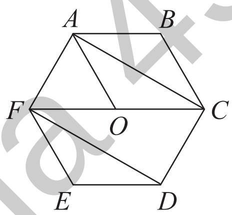
1. Calculaţi suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu 10 laturi.
Soluţie:
Se aplică formula $S_n = (n-2) \cdot 180°$. Obţinem $S_{10} = (10-2) \cdot 180° = 8 \cdot 180° = 1440°$.

2. Aflaţi numărul de laturi ale unui poligon regulat care are unghiurile cu măsura de 135°.

Soluţie:

$u_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow 135^\circ = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow n \cdot 135^\circ = n \cdot 180^\circ - 360^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot 180^\circ - n \cdot 135^\circ = 360^\circ \Rightarrow n\,(180^\circ - 135^\circ) = 360^\circ \Rightarrow n \cdot 45^\circ = 360^\circ \Rightarrow n =$
$= \dfrac{360^\circ}{45^\circ} \Rightarrow n = 8.$

3. Se consideră hexagonul regulat *ABCDEF*. Arătaţi că patrulaterul *ACDF* este dreptunghi.
Soluţie:



$\sphericalangle ACD = \dfrac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = \dfrac{4\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$ şi, deoarece $AB \equiv BC$, rezultă că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 30^\circ$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCA = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ şi analog se arată că $\sphericalangle CAF = 90^\circ$, deci $\sphericalangle FAC + \sphericalangle ACD = 180^\circ$ (interne de aceeaşi parte a secantei), prin urmare $AF \parallel CD$ şi, deoarece $AF \equiv CD$, rezultă că patrulaterul *ACDF* este dreptunghi.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Calculaţi suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat ce are:
a) 5 laturi; b) 6 laturi.

b)

2. Aflaţi măsura unui unghi al unui poligon regulat ce are:
a) 6 laturi; b) 8 laturi.

a)

3. Aflaţi numărul de laturi ale unui poligon convex care are suma măsurilor unghiurilor egală cu:
a) 1080°; b) 1800°.

a)

Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

Testul 1

Capitolele: Mulţimea numerelor reale, *Patrulaterul* şi *Cercul*
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Numărul $\sqrt{0,01}$ aparţine mulţimii:

A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.

(7p) **2.** Media aritmetică a numerelor $\sqrt{20}$ şi $2\sqrt{45}$ este egală cu:

A. $3\sqrt{6}$; B. $2\sqrt{3}$; C. $6\sqrt{2}$; D. $4\sqrt{5}$.

(7p) **3.** Comparând numerele reale $a = 5\sqrt{3}$ şi $b = 6\sqrt{2}$ obţinem:

A. $a \geq b$; B. $a > b$; C. $a < b$; D. $a \leq b$.

(7p) **4.** Rezultatul calculului $3\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ este egal cu:

A. $12\sqrt{5}$; B. $6\sqrt{3}$; C. $9\sqrt{2}$; D. $10\sqrt{2}$.

(7p) **5.** Perimetrul paralelogramului cu $L = 15$ cm şi $l = 8$ cm este egal cu:

A. 52 cm; B. 28 cm; C. 46 cm; D. 30 cm.

(7p) **6.** Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$ şi $\sphericalangle A = 108°$, atunci măsura unghiului C este egală cu:

A. 65°; B. 72°; C. 54°; D. 90°.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(8p) **1.** Scrieţi sub forma cea mai simplă opusul numărului real:

$$x = \left|(-\sqrt{2})^3 + (-\sqrt{2})^5\right| : (-2\sqrt{6}).$$

(8p) **2.** Rotunjiţi la prima zecimală numărul real $a = \left(\sqrt{0,5 \cdot 1,3(8)} - \dfrac{7}{30}\right) : \sqrt{1,(3)}$.

(8p) **3.** Media aritmetică ponderată a numerelor reale $3\sqrt{5}$ şi $8\sqrt{5}$ cu ponderile 2, respectiv n este egală cu $6\sqrt{5}$. Determinaţi numărul natural n.

(8p) **4.** Pe un cerc se consideră punctele D, E şi F în această ordine, astfel încât $\overset{\frown}{EDF} = 7\overset{\frown}{EF}$. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle EDF$.

5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 7$ cm, $CD = 21$ cm şi $\sphericalangle A = 2\sphericalangle D$.

(8p) a) Aflaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle D$.

(8p) b) Calculaţi perimetrul trapezului $ABCD$.

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

Testul 1

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	C	A	D	D	B	B	C	D

Partea a II-a: **1.** $BC + AC > AB$, deci $BC = 10$ cm. **2.** a) $x = \frac{11}{10} - \left(\frac{^{4)}7}{3} - \frac{^{3)}1}{4}\right) : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} - \frac{25}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{^{3)}11}{10} - \frac{^{5)}5}{6} = \frac{8^{(2}}{30} = \frac{4}{15}$; b) $x = \frac{4}{15} = 0{,}2(6) = 0{,}266...$, deci rotunjind la a doua zecimală numărul rațional pozitiv x obținem 0,27. **3.** a) $BC = 17$ cm; b) $\sphericalangle AED = 60°$; c) ΔADE este echilateral cu latura de 10 cm, prin urmare $\mathscr{P}_{ADE} = 30$ cm.

Testul 2

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	D	A	B	A	D	C	B	A

Partea a II-a: **1.** $x = \frac{21}{40}$. **2.** a) $a = 9$ şi $b = 12$; b) $\frac{b}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1{,}(3)$. **3.** a) $\sphericalangle NFD = \sphericalangle EDF = 60°$, deci $NF \parallel DE$; b) $NF \equiv MD$; $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle D$ şi $FD \equiv DE$, deci $\Delta NFD \equiv \Delta MDE$; c) $\Delta NFD \equiv \Delta MDE$, deci $\sphericalangle DNF = \sphericalangle EMD = 90°$, deci $DN \perp FN$, dar $FN \parallel DE$, prin urmare $ND \perp DE$.

Testul 3

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	D	C	A	C	A	B	C	C

Partea a II-a: **1.** $x \in \{0, 1, 2\}$. **2.** a) $x < y$; b) $y : (x^2 - y) = \frac{17}{9} : \left(\frac{121}{36} - \frac{17}{9}\right) = \frac{17}{9} : \frac{53}{36} = \frac{68}{53}$.

3. a) $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 45°$, deci $AD \equiv BD$; b) $\sphericalangle ACE = 45°$ şi $\sphericalangle CDH = 90°$, deci $\sphericalangle DHC = 45°$; c) $AD \equiv BD$, $\sphericalangle ADH \equiv \sphericalangle BDC$ şi $DH \equiv DC$, deci $\Delta ADH \equiv \Delta BDC$, aşadar $AH \equiv BC$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) $16 = 4^2$; b) $36 = 6^2$; c) $49 = 7^2$; d) $64 = 8^2$; e) $81 = 9^2$; f) $100 = 10^2$; g) $144 = 12^2$; h) $196 = 14^2$; i) $324 = 18^2$; j) $400 = 20^2$. **2.** a) Rădăcina pătrată a numărului natural 25 este 5 sau radical din 25 este egal cu 5. **3.** a) A; b) A; c) A; d) A; e) F; f) A. **4.** a) $\sqrt{16} = 4$; b) $\sqrt{25} = 5$; c) $\sqrt{36} = 6$; d) $\sqrt{49} = 7$; e) $\sqrt{64} = 8$; f) $\sqrt{100} = 10$; g) $\sqrt{121} = 11$; h) $\sqrt{144} = 12$; i) $\sqrt{225} = 15$; j) $\sqrt{256} = 16$. **5.** a) $\sqrt{(-11)^2} = 11$; b) $\sqrt{(-23)^2} = 23$; c) $\sqrt{(-59)^2} = 59$; d) $\sqrt{(-77)^2} = 77$. **6.** a) $A = \{-7, 7\}$; b) $B = \{-8, 8\}$; $C = \{-29, 29\}$; $D = \{-67, 67\}$. **7.** a) 9; b) 1; c) 15; d) 13; e) 3; f) –4. **8.** a) 90; b) –1; c) –2; d) –7. **9.** a) A; b) A; c) A; d) A. **10.** a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{8}{9}$; d) $\frac{5}{7}$; e) $\frac{9}{10}$; f) $\frac{7}{12}$; g) $\frac{15}{8}$; h) $\frac{14}{5}$. **11.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{5}{6}$; e) $\frac{4}{7}$; f) $\frac{5}{9}$. **12.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{3}{2}$;

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **II. 1.** $4\sqrt{5}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $-2\sqrt{2}$. **III. 1.** C. **2.** D. **3.** B. **IV.** $a = \frac{4}{9}$, $\sqrt{a} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$. **V.** a) $x = \sqrt{2}$; b) $y = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{xy} = 2 \in \mathbb{N}$.

Lecţia 12. Media aritmetică şi media aritmetică ponderată a *n* numere reale, $n \geq 2$

1. 28; 32; 40; 35. **2.** 7; 8; 9; 12. **3.** $9\sqrt{6}$; $12\sqrt{5}$; $8\sqrt{7}$; $12\sqrt{3}$. **4.** $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $6\sqrt{5}$; $8\sqrt{7}$. **5.** a) 8; b) 7; c) 7; d) 6. **6.** a) $2\frac{1}{8}$; b) $1\frac{7}{24}$; c) $\frac{19}{36}$; d) $1\frac{21}{40}$. **7.** a) $\frac{25}{24}$; b) $\frac{47}{24}$; c) $\frac{61}{60}$; d) $\frac{17}{9}$. **8.** a) $y = 34\sqrt{2}$; b) $y = 30\sqrt{2}$; c) $y = 27\sqrt{2}$. **9.** a) $\sqrt{2}+3\sqrt{7}$; b) $3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$. **10.** a) $5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$. **11.** a) $1\frac{7}{8}$; b) $\frac{23}{36}$; c) $\frac{29}{54}$; d) $1\frac{13}{72}$. **12.** a) $y = 15\sqrt{7}$; b) $y = 7\sqrt{7}$; c) $y = 13\sqrt{7}$. **13.** a) $2\frac{1}{30}$; b) $\frac{167}{192}$. **14.** a) $\frac{43}{150}$; b) $\frac{77}{480}$. **15.** a) $5\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{7}$. **16.** a) $\frac{21\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{19\sqrt{3}}{2}$. **17.** a) $5\sqrt{7}$; b) $4\sqrt{5}$. **18.** a) $n = 5$; b) $n = 6$. **19.** a) $1\frac{9}{29}$; b) $2\frac{9}{22}$. **20.** a) $n = 3$; b) $n = 2$. **21.** a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **22.** 7,32. **23.** a) $n = 3$; b) $n = 5$. **24.** $a = 2\sqrt{7}$, $b = 6\sqrt{7}$, $c = 16\sqrt{7}$. **25.** Deoarece $\overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$ rezultă că $a \in \{0, 1\}$; $x < \overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$, deci $\overline{1,a38} = \frac{x+\overline{1,2a8}}{2}$, de unde obţinem $x \in \{0,868; 1,058\}$. **Test de evaluare stadială: 1.** a) $3\sqrt{7}$; b) 2; c) $4\sqrt{3}+3$. **2.** a) $5\sqrt{6}$; b) $\frac{59}{120}$. **3.** $2\sqrt{3}$.

Lecţia 13. Media geometrică a două numere reale pozitive

1. B. **2.** 4; 5; 6; 7. **3.** 6; 9; 8; 10. **4.** a) 14; b) 15; c) 12; d) 20. **5.** a) 5; b) 7; c) 4; d) 3. **6.** a) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$; b) $\frac{3\sqrt{7}}{5}$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; d) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$. **7.** a) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$; c) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$; d) $\frac{13\sqrt{5}}{15}$. **8.** a) 10; b) 15; c) 56; d) 63. **9.** a) $x = 32\sqrt{3}$; b) $x = 32\sqrt{2}$; c) $x = 12\sqrt{6}$; d) $x = 48\sqrt{3}$. **10.** a) $10\sqrt{2}$; b) $21\sqrt{3}$; c) $20\sqrt{2}$; d) $12\sqrt{7}$. **11.** a) $2\sqrt{21}$; b) $3\sqrt{10}$; c) $5\sqrt{14}$; d) $6\sqrt{14}$. **12.** a) $6\sqrt{\sqrt{3}}$; b) $10\sqrt{\sqrt{2}}$. **13.** a) $25\sqrt{6}$; b) $9\sqrt{5}$; c) $18\sqrt{3}$; d) $32\sqrt{7}$; e) $24\sqrt{2}$; f) $25\sqrt{7}$. **14.** $x + x^{-1} = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$. **15.** a) $x + y \geq 2\sqrt{x \cdot y}$, $y + z \geq 2\sqrt{y \cdot z}$ şi $z + x \geq 2\sqrt{z \cdot x}$, prin urmare $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz$; b) $xy + 1 \geq 2\sqrt{xy}$, $yz + 1 \geq 2\sqrt{yz}$ şi $zx + 1 \geq 2\sqrt{zx}$, prin urmare $(xy + 1) \cdot (yz + 1)(zx + 1) \geq 8xyz$. **16.** a) $x = \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$; $m_g = 2$; b) $x = \sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$; $m_g = 3$. **17.** a) $x = 4\sqrt{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{9}$; $m_g = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $x = 3\sqrt{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $m_g = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **18.** $x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \leq \frac{x(y+z)}{2} + \frac{y(z+x)}{2} + \frac{z(x+y)}{2} = \sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^2z^2} + \sqrt{z^2x^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{y^2+z^2}{2} + \frac{z^2+x^2}{2} = x^2 + y^2 + z^2$. **19.** $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$. **20.** Notând $b + c = x$, $c + a = y$, $a + b = z$ obţinem

$\in \{-804, 804\}$. **Test de evaluare stadială: 1.** a) $x \in \{-9, 9\}$; b) $x \in \{-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\}$; c) $x \in \left\{-\frac{5\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right\}$. **2.** $x \in \{-3, 13\}$. **3.** $x \in \{-5 \cdot 2^{13}, 5 \cdot 2^{13}\}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $y = \sqrt{6}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$. **6.** $n = 4$. **Testul 2. 5.** $y = 4\sqrt{5} - 3$. **6.** $m_{ap} = 0{,}6$. **Testul 3. 5.** $m_{ap} = \frac{5}{13}$. **6.** $y = 4\sqrt{6}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. **2.** A. **3.** A. **II. 1.** $2\sqrt{2}$. **2.** $\varnothing$. **3.** $\frac{1}{3}$. **III. 1.** A. **2.** C. **3.** D. **IV.** $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$. **V.** a) $n = 6$; b) $x \in \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. $\mathcal{P} = 4 \cdot 15\sqrt{2}$ dam $> 4 \cdot 15 \cdot 1{,}41$ dam $= 84{,}6$ dam $> 84{,}5$ dam. **2.** 3,5 m². **3.** 5850 kg. **4.** 34 cărţi. **5.** 2,5 lei. **6.** 8,75. **7.** $2\sqrt{34}$ dm $= \sqrt{136}$ dm $> 3\sqrt{15}$ dm $= \sqrt{135}$ dm. **8.** $\mathcal{P} = 10\sqrt{5} \cdot 4$ m $< 40 \cdot 2{,}237$ m $= 89{,}48$ m $< 89{,}5$ m. **9.** Luna a doua. **10.** $245\sqrt{3}$ km $> 245 \cdot 1{,}73$ km $= 423{,}85$ km; $423{,}85 : 60 = 7{,}06...$, deci automobilul nu poate parcurge distanţa respectivă în 7 ore. **11.** $\mathcal{A}_d = 30\sqrt{3}$ m²; $\mathcal{A}_r = 30\sqrt{3}$ m², deci $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_r$. **12.** 25 ani. **13.** 7. **14.** Laura, Irina, Ioana, Maria sau Maria, Irina, Ioana, Laura. **15.** 94 spectatori. **16.** $\mathcal{V}_c = 250\sqrt{2}$ dm³ $> 250 \cdot 1{,}41$ dm³ $= 352{,}5$ dm³ $= 352{,}5$ ℓ. **17.** Ştefan, Andrei şi Mihai au aceeaşi vârstă. **18.** Dan şi Ion au aceeaşi vârstă. **19.** 2 ani sau 3 ani sau 4 ani sau 6 ani. **20.** Vali – 1 an, Ion – 3 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 9 ani sau Vali – 2 ani, Ion – 4 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 8 ani.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL

Lecţia 1. Patrulaterul convex

1. $MNPQ$. **3.** a) A; b) F; c) F; d) A. **4.** a) F; b) F; c) A; d) A. **5.** C. 360°. **6.** A. **7.** a) $\measuredangle D = 110°$; b) $\measuredangle A = 85°$. **8.** a) $\mathcal{P}_{MNPQ} = 23$ cm; b) $\mathcal{P}_{MNPQ} = 24$ cm. **9.** F. **10.** a) $AD = 12$ cm; b) $BC = 8{,}5$ cm. **11.** a) $\measuredangle M = 36°$, $\measuredangle N = 72°$, $\measuredangle P = 108°$, $\measuredangle Q = 144°$; b) $\measuredangle M = 96°$, $\measuredangle N = 24°$, $\measuredangle P = 120°$, $\measuredangle Q = 120°$. **12.** Notăm cu $x°$, $(x + 2)°$, $(x + 4)°$ şi $(x + 6)°$ măsurile celor 4 unghiuri; $x° + x° + 2° + x° + 4° + x° + 6° = 360°$ sau $4x° + 12° = 360°$, deci $4x° = 348°$, aşadar $x° = 87°$, prin urmare unghiurile au măsurile de 87°, 89°, 91°, 93°. **13.** a) $DE = EF = 30$ cm, $FG = 10$ cm, $GD = 20$ cm; b) $EF = FG = 30$ cm, $GD = 7{,}5$ cm, $DE = 22{,}5$ cm. **14.** a) $\measuredangle A = 51°$, $\measuredangle B = 102°$, $\measuredangle C = 101°$, $\measuredangle D = 106°$; b) $\measuredangle A = 81°$, $\measuredangle B = 138°$, $\measuredangle C = 95°$, $\measuredangle D = 46°$. **15.** a) $AB = 19$ cm, $BC = 38$ cm, $CD = 32$ cm şi $DA = 11$ cm; b) $AB = 30$ cm, $BC = 45$ cm, $CD = 10$ cm şi $DA = 15$ cm. **16.** a) $\measuredangle D = 120°$, $\measuredangle E = 72°$, $\measuredangle F = 96°$ şi $\measuredangle G = 72°$; b) a) $\measuredangle D = 30°$, $\measuredangle E = 60°$, $\measuredangle F = 120°$ şi $\measuredangle G = 150°$. **17.** a) $\measuredangle M = 60°$, $\measuredangle N = 70°$, $\measuredangle P = 100°$, $\measuredangle Q = 130°$; b) $\measuredangle M = 64°$, $\measuredangle N = 72°$, $\measuredangle P = 104°$, $\measuredangle Q = 120°$. **18.** a) $\measuredangle D = 150°$, $\measuredangle E = 120°$, $\measuredangle F = 75°$, $\measuredangle G = 15°$; b) $\measuredangle D = 144°$, $\measuredangle E = 108°$, $\measuredangle F = 72°$, $\measuredangle G = 36°$. **19.** $AC < AB + BC$ şi $AC < AD + DC$, deci $2AC < \mathcal{P}_{ABCD}$ şi analog se arată că $2BD < \mathcal{P}_{ABCD}$, prin urmare $2(AC + BD) < 2\mathcal{P}_{ABCD}$, de unde rezultă că $AC + BD < \mathcal{P}_{ABCD}$. **20.** a) $\mathcal{P}_{ABD} + \mathcal{P}_{BCD} = \mathcal{P}_{ACD} + \mathcal{P}_{ABC}$, sau $2BD = 2AC$, deci $AC \equiv BD$; b) $\mathcal{P}_{ABD} = \mathcal{P}_{ACD}$ şi $AC \equiv BD$, prin urmare $AB \equiv CD$.
Test de evaluare stadială: 1. $\measuredangle F = 85°$. **2.** $\measuredangle M = 90°$. **3.** $AC = 9$ cm.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **II. 1.** 81 cm^2. **2.** 9 cm. **3.** 27 cm^2. **III. 1.** C. **2.** D. **3.** B. **IV.** $\Delta TAB \equiv \Delta TDC$, deci $\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle TDC$ şi $\sphericalangle TBA \equiv \sphericalangle TCD$, dar $\sphericalangle TAD \equiv \sphericalangle TDA$ şi $\sphericalangle TBC \equiv \sphericalangle TCB$, prin urmare $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA$ şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$, deci $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$, de unde rezultă că $AD \parallel BC$, aşadar $ABCD$ este trapez isoscel. **V.** a) Observăm că $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD = 30°$, deci $\sphericalangle DAC = 90°$, prin urmare $CD = 2AD = 60$ cm; $\mathscr{P}_{ABCD} = 150$ cm; b) În ΔADO, $DO = 2AO$, deci $CO = 2OA$, prin urmare $OC \equiv OE$ şi analog se arată că $OD \equiv OF$, de unde rezultă că $CDEF$ este dreptunghi. Din ΔCDE obţinem $DE = \frac{CE}{2} = 34$ cm; $\mathscr{A}_{CDEF} = 2040$ cm^2.

Probleme din realitatea cotidiană

1. 96 stâlpi. **2.** $\mathscr{A}_{DEFC} = 16{,}5$ dm^2. **3.** $\mathscr{P}_{DMCN} = 16$ dm. **4.** 16 m. **5.** Cantităţile sunt egale. **6.** $\mathscr{A}_{ABCD} = 44$ m^2. **7.** 12 m^2. **8.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 120°$ şi $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 60°$. **9.** 800 m^2. **10.** 5429 m^2, 2492 m^2. **11.** a) $d(A, CD) + d(B, CD) = 1{,}3$ m; b) $d(A, CD) = 1{,}3$ m. **12.** $\mathscr{A}_{AMCN} = 100$ dam^2. **13.** $\mathscr{A}_{EFGH} = 50\%\mathscr{A}_{ABCD}$. **14.** $\mathscr{P}_{ABCD} = 9$ m. **15.** $EF = 8$ m. **16.** $\mathscr{A}_{ABCD} = 200$ dam^2. **17.** 54 m^2 de parchet. **18.** $\mathscr{A} = 490$ m^2. **19.** 108 m. **20.** $BD = 2$ km, $DC = 4$ km.

CAPITOLUL II. CERCUL

Lecţia 12. Unghi înscris în cerc

1. C. **2.** a) $\overset{\frown}{MN} = 54°$; b) $\sphericalangle MON = 48°$. **3.** a) $\overset{\frown}{EF} = 60°$; $\overset{\frown}{EDF} = 300°$; b) $\overset{\frown}{EF} = 72°$; $\overset{\frown}{EDF} = 288°$. **4.** a) F; b) A. **5.** a) $\sphericalangle EDF = 20°$; b) $\sphericalangle EDF = 37°$; c) $\sphericalangle EDF = 48°$. **6.** a) $\overset{\frown}{EF} = 30°$; b) $\overset{\frown}{EF} = 52°$; c) $\overset{\frown}{EF} = 90°$. **7.** a) $\sphericalangle A = 77°$, $\sphericalangle B = 67°$ şi $\sphericalangle C = 36°$; b) $\sphericalangle A = 30°30'$, $\sphericalangle B = 85°$ şi $\sphericalangle C = 64°30'$. **8.** a) $\overset{\frown}{AB} = 170°$, $\overset{\frown}{BC} = 80°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 110°$; b) $\overset{\frown}{AB} = 146°$, $\overset{\frown}{BC} = 92°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 122°$. **9.** $\sphericalangle MPN = 90°$. **10.** $EF = 14\sqrt{5}$ cm. **11.** a) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 70°$ şi $\sphericalangle C = 50°$; b) $\sphericalangle A = 63°$, $\sphericalangle B = 72°$ şi $\sphericalangle C = 45°$. **12.** a) $\overset{\frown}{AB} = 136°$, $\overset{\frown}{BC} = 96°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 128°$; b) $\overset{\frown}{AB} = 138°$, $\overset{\frown}{BC} = 102°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 120°$. **13.** a) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 48°$ şi $\sphericalangle C = 72°$; b) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 45°$ şi $\sphericalangle C = 75°$. **14.** a) Cum $\sphericalangle ACB = 45°$, rezultă că $\sphericalangle AOB = 90°$ şi obţinem $R = 7$ cm; b) Analog obţinem $R = 9$ cm. **15.** a) $EF = 6\sqrt{2}$ cm; b) $EF = 5\sqrt{2}$ cm. **16.** Observăm că ΔOAB este echilateral, deci $\sphericalangle AOB = 60°$, prin urmare $\sphericalangle ACB \in \{30°; 150°\}$. **17.** a) Cum $\sphericalangle BAO = 23°$, rezultă că $\sphericalangle AOB = 134°$, deci $\sphericalangle ACB = 67°$. Analog obţinem $\sphericalangle BAC = 53°$, deci $\sphericalangle ABC = 60°$; b) $\sphericalangle BAC = 53°$, $\sphericalangle ABC = 51°$ şi $\sphericalangle BCA = 76°$. **18.** Dacă $E \in \overset{\frown}{BD}$, atunci $ABED$ şi $ADCF$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAC = \sphericalangle BDE$, aşadar $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EAF$. **19.** Dacă notăm cu h înălţimea ΔOEF, rezultă că $h = \frac{R}{2}$, prin urmare înălţimea se opune unui unghi cu măsura de 30°, deci $\sphericalangle EOF \in \{30°, 150°\}$ şi $\sphericalangle EDF \in \{15°, 75°\}$. **20.** Patrulaterele $AEFC$ şi $EBDF$ sunt inscriptibile; $\sphericalangle BDF + \sphericalangle BEF = 180°$, deci $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle AEF$; $\sphericalangle AEF + \sphericalangle ACF = 180°$, prin urmare $\sphericalangle BDC + \sphericalangle ACD = 180°$, de unde rezultă că $AC \parallel BD$. **21.** Construim $DM \perp AB$, $M \in AB$ şi $DN \perp AC$, $N \in AC$ şi observăm că $\Delta DMB \equiv \Delta DNC$, deci $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle DCA$, prin urmare punctele A, B, C şi D sunt conciclice. **22.** $BCEF$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle FBE \equiv \sphericalangle ECF$ (1). Din patrulaterele inscriptibile $BDHF$ şi $CDHE$ rezultă $\sphericalangle FBH \equiv \sphericalangle FDH$, respectiv $\sphericalangle ECH \equiv \sphericalangle EDH$ şi folosind (1) obţinem $\sphericalangle FDH \equiv \sphericalangle EDH$; analog obţinem $\sphericalangle EFH \equiv \sphericalangle DFH$, de unde rezultă concluzia. **23.** Notăm cu D al doilea punct de intersecţie al cercurilor circumscrise triunghiurilor AMP şi CPN şi observăm că $\sphericalangle ABC + \sphericalangle MDN = 180°$, deci $BMDN$ este inscriptibil, prin urmare cele trei cercuri au în comun punctul D. **24.** Se arată că $\sphericalangle APN = 90°$, deci $APND$ este inscriptibil, prin urmare $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle AND$ şi $\sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle BNC$, dar $\sphericalangle AND \equiv \sphericalangle BNC$, deci $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle PAD$, aşadar $DP = DA = l$. **25.** Dacă DE şi DF sunt diametre în cercurile circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv ACD, rezultă că punctele E, A şi F sunt coliniare. $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$, deci $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$, prin urmare $DE \equiv DF$. **26.** Considerăm punctul $E \in AD$, astfel încât $DE \equiv DC$ şi, deoarece $\sphericalangle ADC = 60°$, rezultă că ΔEDC este echilateral, deci $EC \equiv DC$, prin urmare $\Delta AEC \equiv \Delta BDC$, de unde rezultă că $AE \equiv BD$, deci $AD = BD + CD$. **27.** Fie T punctul diametral opus punctului D.

Cuprins