Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

8

Ediţia a VIII-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică – algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru – 8 /
Ion Tudor. – Ed. a 8-a. – Pitești : Paralela 45, 2024 –
2 vol.
ISBN 978-973-47-4116-8
Partea 1. – 2024. – ISBN 978-973-47-4117-5
51

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii este adevărată:

A. $-\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; B. $-\sqrt{25} \in \mathbb{Z}$; C. $-\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}$; D. $-\sqrt{25} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Opusul numărului raţional $\frac{8}{5}$ este numărul raţional:

A. $-\frac{8}{5}$; B. $\frac{5}{8}$; C. $\frac{8}{5}$; D. $-\frac{5}{8}$.

(0,5p) **3.** Media aritmetică a numerelor naturale 3 şi 6 este egală cu:

A. 5; B. 2,5; C. 4,5; D. 7.

(0,5p) **4.** Soluţia ecuaţiei $x^2 = 8$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A. $\{-2, 4\}$; B. $\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$; C. $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$; D. $\{-4, 2\}$.

(0,5p) **5.** Dintre numerele raţionale pozitive 0,(32), 0,33, 0,3(2) şi 0,32, cel mai mare este:

A. 0,3(2); B. 0,32; C. 0,33; D. 0,(32).

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului $(2\sqrt{5}):\sqrt{10}-\sqrt{2}$ este egal cu:

A. 0; B. $\sqrt{2}$; C. $\sqrt{5}$; D. 3.

(0,5p) **7.** În triunghiul ABC notăm cu M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Dacă $MN = 7$ cm, atunci BC este egală cu:

A. 21 cm; B. 3,5 cm; C. 5,5 cm; D. 14 cm.

(0,5p) **8.** Într-o urnă sunt 6 bile albe şi 9 bile negre. Extrăgând o bilă, probabilitatea ca aceasta să fie albă este egală cu:

A. $\frac{1}{6}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{1}{9}$.

(0,5p) **9.** Distanţa dintre punctele $A(3;\ 0)$ şi $B(1;\ 2\sqrt{3})$ exprimată în centimetri este:

A. $\sqrt{2}$ cm; B. 6 cm; C. 4 cm; D. $\sqrt{3}$ cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x-y=10 \end{cases}$, unde x şi y sunt numere reale.

2. Se consideră numărul real $x = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) : 2,(6) - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(0,7p) a) Arătaţi că $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. *(0,8p)* b) Calculaţi $m_a(x;\ x^{-1})$.

ALGEBRĂ

Capitolul I

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

Citesc și rețin

În clasa a VI-a, la capitolul „Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale” am învățat că o mulțime poate fi definită printr-o proprietate a elementelor acesteia.

Exemplu: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 5\}$. Citim „Mulțimea A este formată din numerele naturale nenule n cu proprietatea $n < 5$”.

Cum se aplică?

1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 35 \vdots x\}$ și precizați cardinalul acesteia.

Soluție:

Divizorii întregi ai lui 35 sunt ±1, ±5, ±7, ±35, prin urmare $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$ și card $A = 8$.

2. Scrieți mulțimea $P = \{2, 3, 5, 7\}$, folosind o proprietate a elementelor acesteia.

Soluție:

Observăm că elementele mulțimii P sunt numerele naturale prime de o cifră, prin urmare mulțimea P se scrie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ este număr prim de o cifră$\}$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 5^2\}$ și $F = \{a \mid \overline{6a2} \vdots 3\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Soluție:

Mai întâi enumerăm elementele mulțimilor E și F. Elementele mulțimii E îndeplinesc condiția $2^n < 5^2$ sau $2^n < 25$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulțimii F îndeplinesc condiția $\overline{6a2} \vdots 3$, deci $3 \mid 6 + a + 2$ sau $3 \mid 8 + a$, de unde rezultă că $F = \{1, 4, 7\}$; a) $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; b) $E \cap F = \{1, 4\}$; c) $E \setminus F = \{0, 2, 3\}$; d) $F \setminus E = \{7\}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} =$ ....; b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 7\} =$ ....;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < 3\} =$ ....; d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 5\} =$ ....

2. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „geometria”$\} =$ ....;

b) $B = \{y \mid y$ este cifră a numărului „701233048”$\} =$ ....

3. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} =$ ....;

b) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 4\} =$ ....

4. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{n}{5} \text{ este fracţie subunitară} \right\} =$ ....;

b) $B = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \dfrac{5}{n} \text{ este fracţie supraunitară} \right\} =$ ....

5. Se consideră mulţimile $E = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „tetraedru”$\}$ şi $F = \{y \mid y$ este literă a cuvântului „cilindru”$\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Efectuaţi $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$ în următoarele cazuri:

a) $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 5\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 3\}$;

b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z}^* \mid |m| \leq 3\}$.

7. Ştiind că $\mathcal{D}_n$ este mulţimea divizorilor naturali ai lui n, efectuaţi:

a) $\mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_9$; b) $\mathcal{D}_6 \cap \mathcal{D}_9$; c) $\mathcal{D}_6 \setminus \mathcal{D}_9$; d) $\mathcal{D}_9 \setminus \mathcal{D}_6$.

8. Se consideră mulţimile $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m < 4\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 3\}$. Efectuaţi:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$; e) $A \times B$; f) $B \times A$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

26. Determinaţi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$ în următoarele cazuri:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |4 - x| < 5\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{3x+8}{4x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |1 - 2x| < 7\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{1-4x}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

27. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| - |x - 1| + |x + 1| \le 1\}$. Câte submulţimi are mulţimea $A \cap \mathbb{Z}$?

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Efectuaţi $A \cup B$ şi $A \cap B$ în următoarele cazuri:
a) $A = (-1; +\infty)$ şi $B = [3; +\infty)$; b) $A = [-67; 23)$ şi $B = (-71; 19]$.

(3p) **2.** Se consideră intervalele de numere reale $E = \left(-\sqrt{5}; \sqrt{6}\right)$, $F = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{7}\right]$ şi mulţimile $G = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \in E \cup F\}$, $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in E \cap F\}$. Efectuaţi:
a) $G \cup H$; b) $G \cap H$; c) $G \setminus H$; d) $H \setminus G$.

(3p) **3.** Scrieţi mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 4\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$ sub formă de intervale de numere reale şi efectuaţi: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$.

Lecţia 4. Inecuaţii de forma $ax + b > 0$ ($\ge, <, \le$), $x, a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$

Citesc şi reţin

Definiţie: O propoziţie cu o variabilă de forma $ax + b > 0$ ($\ge, <, \le$), $x, a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$ (1) se numeşte **inecuaţie de gradul I cu o necunoscută**.

Definiţie: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie a inecuaţiei** (1) dacă $au + b > 0$ (u verifică inecuaţia).

A rezolva inecuaţia (1) înseamnă a determina mulţimea de soluţii:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b > 0\}.$$

Definiţie: Două inecuaţii de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi următoarele inecuaţii, unde $x \in \mathbb{R}$:

a) $10x + 3 < -11$; b) $-2\sqrt{6}x \ge 4\sqrt{3}$.

Soluţie:

a) $10x + 3 < -11 \Leftrightarrow 10x < -14 \Leftrightarrow x < \frac{-14^{(2}}{10} \Leftrightarrow x < -\frac{7}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{5}\right)$;

b) $-2\sqrt{6} \ge 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x \le \frac{4\sqrt{3}}{-2\sqrt{6}} \Leftrightarrow x \le -\frac{^{\sqrt{2})}2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \le -\frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \le -\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţiile:

a) $5(2x - 3) \ge 7x$; b) $0,8 - 0,(6)x > 2$.

Soluţie:

a) $5(2x - 3) \ge 7x \Leftrightarrow 10x - 15 \ge 7x \Leftrightarrow 10x - 7x \ge 15 \Leftrightarrow 3x \ge 15 \Leftrightarrow x \ge \frac{15}{3} \Leftrightarrow x \ge 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [5; +\infty)$;

b) $0,8 - 0,(6)x > 2 \Leftrightarrow -0,(6)x > 2 - 0,8 \Leftrightarrow -0,(6)x > 1,2 \Leftrightarrow -\frac{6^{(3}}{9}x > \frac{12^{(2}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x > \frac{6}{5} \Leftrightarrow x < \frac{6}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x < -\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{9}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{5}\right)$.

3. Determinaţi cel mai mic număr întreg care verifică inecuaţia:

$$9\left(x+\sqrt{7}\right) < 2\sqrt{7}\left(\sqrt{7}x-3\right).$$

Soluţie:

$9\left(x+\sqrt{7}\right) < 2\sqrt{7}\left(\sqrt{7}x-3\right) \Leftrightarrow 9x + 9\sqrt{7} < 14x - 6\sqrt{7} \Leftrightarrow 9x - 14x < -6\sqrt{7} -$

$- 9\sqrt{7} \Leftrightarrow -5x < -15\sqrt{7} \Leftrightarrow x > \left(-15\sqrt{7}\right) : (-5) \Leftrightarrow x > 3\sqrt{7} \Leftrightarrow x \in \left(3\sqrt{7}; +\infty\right)$;

$x > 3\sqrt{7}$ sau $x > \sqrt{63}$ şi $x \in \mathbb{Z}$, deci $x = \sqrt{64} = 8$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Stabiliţi dacă numărul real 1 verifică inecuaţia:

a) $13x < 14$; b) $5x - 1 \le 4$; c) $0,5x \ge 0,25$;

d) $27 - 13x > 14$; e) $7\left(1-\frac{x+1}{2}\right) \le 0$; f) $17 - 2\sqrt{3}x \ge 13$.

b)

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Citesc şi reţin

Numere reale reprezentate prin litere

Spunem despre o expresie de forma ax^n, unde $a, x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, că este un număr real **reprezentat prin litere**.

Numărul real a se numeşte **coeficient**, iar x^n se numeşte **parte literală**. Partea literală este formată din una sau mai multe litere care înlocuiesc numere reale neprecizate.

Exemple: $\frac{1}{2}x^5; -3x^2; 4\sqrt{5}xy^3; \frac{7}{\sqrt{3}}a^2bc^7$.

Definiţie: Un ansamblu de numere reale reprezentate prin litere legate între ele prin operaţii aritmetice (adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere) se numeşte **expresie algebrică**.

Exemplu: $E(x) = (x^3 + 2x^3)^2 : (9x^4) - 5x$.

Definiţie: Două sau mai multe numere reale reprezentate prin litere se numesc **termeni asemenea** dacă părţile lor literale sunt identice.

Exemple: $-4x^3$ şi $\sqrt{6}x^3$; $2,(3)x^4y^3$ şi $-\frac{1}{\sqrt{2}}x^4y^3$.

Definiţie: O sumă de numere reale în care cel puţin un termen este număr real reprezentat prin litere se numeşte **sumă algebrică**.

Definiţie: O sumă algebrică este scrisă sub **formă canonică** dacă nu conţine termeni asemenea.

Exemplu: $x^2 - \sqrt{2}x + 3$.

Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Prin adunare şi scădere, termenii asemenea se reduc. De aceea, operaţiile de adunare şi scădere a numerelor reale reprezentate prin litere se numesc operaţii de reducere a termenilor asemenea.

Reguli de calcul

- $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $ax^n - bx^n = (a-b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $a_1x^n + a_2x^n + a_3x^n + \ldots + a_mx^n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)x^n$, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Cum se aplică?

1. Reduceţi termenii asemenea:

a) $4x + 3x$; b) $5x^2 - 2x^2$.

Soluţie:

a) $4x+3x=x(4+3)=7x$; b) $5x^2-2x^2=x^2(5-2)=3x^2$.

2. Reduceţi termenii asemenea:

a) $31x - 29 - 27x + 16$; b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3$.

Soluţie:

a) $31x - 29 - 27x + 16 = x(31 - 27) - 29 + 16 = 4x - 13$;

b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3 = x^3(4 - 1 - 4) + x(-1 + 7) = -x^3 + 6x$.

3. Reduceţi termenii asemenea:

a) $\frac{1}{4}a^3-\frac{2}{5}a^2+\frac{7}{4}a^3+\frac{3}{2}a^2$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2-\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{3}{2\sqrt{2}}a-\frac{8}{\sqrt{3}}a^2$.

Soluţie:

a) $\frac{1}{4}a^3-\frac{2}{5}a^2+\frac{7}{4}a^3+\frac{3}{2}a^2=a^3\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)+a^2\left(-\frac{{}^{2)}2}{5}+\frac{{}^{5)}3}{2}\right)=\frac{8}{4}a^3+a^2\left(-\frac{4}{10}+\frac{15}{10}\right)=$

$=2a^3+\frac{11}{10}a^2$;

b) $\frac{{}^{\sqrt{3})}2}{\sqrt{3}}a^2-\frac{{}^{\sqrt{2})}1}{\sqrt{2}}a+\frac{{}^{\sqrt{2})}3}{2\sqrt{2}}a-\frac{{}^{\sqrt{3})}8}{\sqrt{3}}a^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{3\sqrt{2}}{4}a-\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2=$

$=a^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)+a\left(-\frac{{}^{2)}\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{6\sqrt{3}}{3}a^2+a\left(-\frac{2\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=-2\sqrt{3}a^2+$

$+\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Pentru următoarele numere reale reprezentate prin litere numiţi coeficienţii şi părţile lor literale:

a) $38x^5$; b) $-\frac{7}{8}y^3$; c) $\frac{11}{15}t^4$; d) $-\sqrt{6}x^8$;

e) $-\frac{7}{5}xy^3$; f) $-11a^2b^3$; g) $3\sqrt{2}z^5t^2$; h) $\frac{27}{31}z^4t$.

2. Completaţi spaţiile punctate cu forma canonică a următoarelor sume algebrice:

a) $29 + 3x^2 - 8x =$ ....; b) $35x - 7 - 4x^2 =$ ....;

c) $4y + 2y^4 - 21 - \sqrt{2}\,y^3 =$ ....;

d) $-y^2 + \sqrt{5}\,y^3 - 16 - 9y^5 =$ ....

Lecţia 8. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere

Citesc şi reţin

Pentru **ridicarea la putere** cu exponent natural a unui număr real nenul reprezentat prin litere se utilizează următoarele reguli de calcul cu puteri.

Reguli de calcul

- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$, $m, n \in \mathbb{N}$;
- $(ax^m)^n = a^n x^{m \cdot n}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Cum se aplică?

1. Efectuaţi:

a) $(5x^2)^2$; b) $(-3x^5)^3$; c) $(-2x^3)^4$.

Soluţie:

a) $(5x^2)^2 = 5^2x^{2 \cdot 2} = 25x^4$; b) $(-3x^5)^3 = (-3)^3x^{5 \cdot 3} = -27x^{15}$;

c) $(-2x^3)^4 = (-2)^4x^{3 \cdot 4} = +2^4x^{12} = 16x^{12}$.

2. Efectuaţi ridicările la putere şi reduceţi termenii asemenea:

a) $(-5x^6)^2 + (-3x^4)^3$; b) $\left(-\sqrt{7}x^3\right)^5 - \left(2\sqrt{7}x^5\right)^3$.

Soluţie:

a) $(-5x^6)^2 + (-3x^4)^3 = +5^2x^{6 \cdot 2} + (-3^3x^{4 \cdot 3}) = 25x^{12} + (-27x^{12}) = -2x^{12}$;

b) $\left(-\sqrt{7}x^3\right)^5 - \left(2\sqrt{7}x^5\right)^3 = -\sqrt{7}^5 x^{3 \cdot 5} - \left[+\left(2\sqrt{7}\right)^3 x^{5 \cdot 3}\right] = -49\sqrt{7}x^{15} - 56\sqrt{7}x^{15} =$

$= -105\sqrt{7}x^{15}$.

3. Se consideră expresia algebrică $E(x) = (2x^3 + 5)(5 - 2x^3) - 25$. Calculaţi $[E(x)]^3$.

Soluţie:

$E(x) = (2x^3 + 5)(5 - 2x^3) - 25 = 10x^3 - 4x^6 + 25 - 10x^3 - 25 = -4x^6$, de unde rezultă că $[E(x)]^3 = (-4x^6)^3 = -64x^{18}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Efectuaţi:

a) $(2x)^2 =$ ....; b) $(3x^2)^2 =$ ....; c) $(4x^3)^2 =$ ....;

d) $(-5x^4)^2 =$ ....; e) $(-3x^5)^2 =$ ....; f) $(-4x^3)^2 =$ ....

2. Efectuaţi:

a) $(4x^4)^3 =$ ....; b) $(5x^3)^3 =$ ....; c) $(3x^5)^3 =$ ....;

d) $(-4x^4)^3 =$ ....; e) $(-3x^2)^3 =$ ....; f) $(-2x^4)^3 =$ ....

15. Dacă x, y şi z sunt numere reale, verificaţi şi memoraţi următoarele formule de calcul:

a) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$;

b) $(x+y-z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Verificaţi şi memoraţi următoarele formule de calcul prescurtat, unde $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $(x+y)^3 = x^3+3xy(x+y)+y^3$; b) $(x-y)^3 = x^3-3xy(x-y)-y^3$.

17. Arătaţi că $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Efectuaţi:

a) $(10x^7)^2$; b) $\left(-\frac{2}{3}x^5\right)^3$; c) $\left(-\sqrt{7}x\right)^4$.

(3p) **2.** Se consideră expresia algebrică $E(x) = (3x-2x^2)(2x^3+3x^2)-9x^3$. Calculaţi $[E(x)]^3$.

(3p) **3.** Arătaţi că $(x-y-z)^2 = x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(2p) **1.** Se consideră sumele algebrice $A(x) = x^2+6x$ şi $B(x) = 3x^2-7x+4$. Calculaţi:

a) $A(x)+B(x)$; b) $B(x)-A(x)$.

(2p) **2.** Efectuaţi:

a) $2x^3(3x^2+8x)$; b) $(9x^4-6x):(3x)$.

(1p) **3.** Arătaţi că media geometrică a numerelor $5\sqrt{2}-1$ şi $5\sqrt{2}+1$ este un număr natural.

(1p) **4.** Se consideră expresia următoare: $E(x) = (\sqrt{3}x^3)^4-(\sqrt{11}x^6)^2-(\sqrt{2}x^2)^6$. Calculaţi $E(x):(-5x^7)$.

(1p) **5.** Arătaţi că expresia $F(x) = 4(2x^3+5)-(2x+3)(4x^2-6x+9)$ nu depinde de x, oricare ar fi numărul real x.

(2p) **6.** Arătaţi că $n = \sqrt{5}(19\sqrt{5}-\sqrt{10})-(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-6\sqrt{3}-\sqrt{6}+1)$ este număr natural cub perfect.

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VIII-a
Capitolul: Calcul algebric în $\mathbb{R}$ (Lecţiile 5 – 8)
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Numerele reale reprezentate prin litere $\sqrt{2}x^3$ şi $\sqrt{3}x^2$ sunt termeni asemenea. A F

(7p) **2.** Forma canonică a sumei algebrice $8 - x^3 + 7x$ este $-x^3 + 7x + 8$. A F

(7p) **3.** Produsul numerelor reale reprezentate prin litere $\frac{3}{2}x$ şi $\frac{2}{3}x^4$ este egal cu x^5. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** După reducerea termenilor asemenea, suma algebrică $4x^3 + 2x^2 - x^3 + 7x^2$ se scrie ....

(7p) **2.** Câtul împărţirii $(10x^3 - 15x^2) : (5x^2)$ este egal cu ....

(7p) **3.** Efectuând înmulţirea $\sqrt{6}(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ obţinem ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Se consideră sumele algebrice $S_1(y) = y^2 - 4y - 8$ şi $S_2(y) = 2y^3 + y^2 - 3y - 8$. Diferenţa $S_1(y) - S_2(y)$ este egală cu:
A. $-2y^3 + 4$; B. $-5y^2 + y$; C. $-2y^3 - y$; D. $y^3 - 4y^2$.

(8p) **2.** Forma canonică a expresiei $E(x) = (5x - 2)(x^2 - 5x - 2) - 4$ este:
A. $5x^3 - 27x^2$; B. $3x^2 + 8x$; C. $-x^2 + 7x$; D. $4x^3 + 12x^2$.

(8p) **3.** Rezultatul calculului $(x^2 - 2x^2 + 3x^2)^3 : (-2x)^2$ este egal cu:
A. $4x^2$; B. $-4x$; C. $-2x$; D. $2x^4$.

La exerciţiile IV. şi V. scrieţi pe fişă rezolvările complete.

IV. Se consideră numărul:
(8p)
$$n = 4(\sqrt{3} - \sqrt{7}) - \sqrt{21}(\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{21}) - (\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{21} - 10).$$
Arătaţi că $n \in \mathbb{N}$.

V. Se consideră expresia:

$$E(x) = (x^2 - x)(x^2 + 6x - 2) - (x - 3)(x^3 + 3x^2 + x - 1) - 6x,$$

unde $x \in \mathbb{R}$.

(8p) a) Arătați că $E(x) = 5x^3 - 3$, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$.

(8p) b) Arătați că, pentru orice număr natural n, $E(n)$ nu este pătrat perfect.

GEOMETRIE

Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei

Citesc și rețin

Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: **punctul**, **dreapta**, **planul**.

Punctul este descris ca fiind urma lăsată de vârful unui creion ascuțit pe o coală de hârtie. Punctul se notează cu una dintre literele mari ale alfabetului: A, B, C, ...

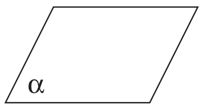
Dreapta este descrisă ca fiind un fir de ață bine întins și nesfârșit la ambele capete. Dreapta se notează cu una dintre literele mici ale alfabetului: a, b, c, ...

Planul este descris ca fiind suprafața unei ape liniștite. Planul se notează cu una dintre literele grecești: α (alfa), β (beta), γ (gama), ...

În continuare vom reprezenta, vom nota și vom citi un punct, o dreaptă și un plan.

Punctul A

Dreapta d

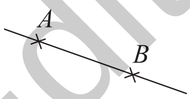


Planul α

Observație: Punctul, dreapta și planul sunt mulțimi de puncte.

Considerăm adevărate, de la început, următoarele **propoziții**:

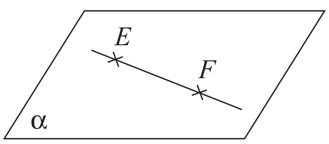
1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una (două puncte distincte determină o dreaptă).



Dreapta determinată de punctele A și B se notează AB sau BA.

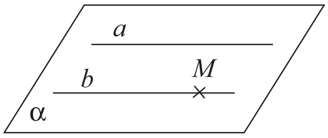
2. Dreapta d este inclusă în planul α dacă orice punct al dreptei d aparține planului α. Notăm $d \subset \alpha$.

3. Dacă două puncte distincte ale dreptei d aparțin planului α, atunci dreapta d este inclusă în planul α.



$$\left.\begin{array}{l} E \in \alpha \\ F \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow EF \subset \alpha$$

4. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o paralelă şi numai una la dreapta respectivă.

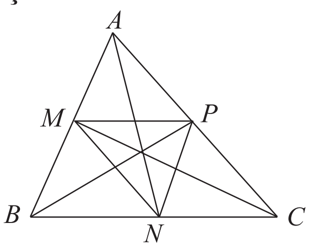


$$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha \\ M\in\alpha \\ b\parallel a \end{array}\right\}\Rightarrow b\subset\alpha$$

Cum se aplică?

1. Dacă punctele A, B şi C sunt vârfurile unui triunghi, iar M, N şi P sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA, aflaţi numărul dreptelor determinate de cele şase puncte.

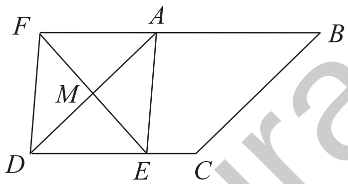
Soluţie:



Cele 6 puncte determină 9 drepte: AB, BC, CA, MN, NP, PM, AN, BP, CM.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctul E situat pe latura CD. Dacă notăm cu M mijlocul laturii AD şi cu F simetricul punctului E faţă de M, arătaţi că punctele F, A şi B sunt coliniare.

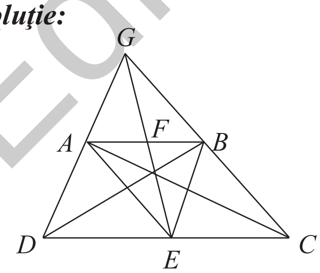
Soluţie:



Deoarece $AM \equiv MD$ şi $EM \equiv MF$, rezultă că patrulaterul $AEDF$ este paralelogram, deci $AF \parallel CD$, prin urmare dreptele AF şi AB sunt identice, de unde rezultă că punctele F, A şi B sunt coliniare.

3. În trapezul $ABCD$, notăm cu E şi F mijloacele bazelor CD, respectiv AB. Dacă $AD \cap BC = \{G\}$, precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D, E, F şi G.

Soluţie:



Arătăm că punctele G, F şi E sunt coliniare. Presupunem că $GF \cap CD = \{E_1\}$. Deoarece $AB \parallel CD$, aplicând teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\dfrac{GF}{GE_1} = \dfrac{AF}{DE_1}$ şi $\dfrac{GF}{GE_1} = \dfrac{BF}{CE_1}$, deci $\dfrac{AF}{DE_1} = \dfrac{BF}{CE_1}$, de unde deducem că $DE_1 \equiv CE_1$, prin urmare $E_1 = E$, deci punctele G, F şi E sunt coliniare. Punctele A, B, C, D, E, F şi G determină 11 drepte: AB, BC, CD, DA, AC, BD, EF, AE, BE, CF şi DF.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În planul α reprezentat în figura alăturată construiţi punctele distincte E şi F şi dreapta determinată de acestea.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii: Dreapta determinată de punctele E şi F de la problema precedentă se notează:

a) EF; b) FE.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

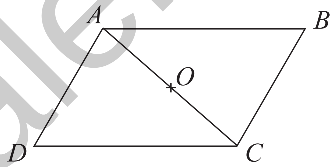
a) Printr-un punct trece o infinitate de drepte.

b) Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.

4. În paralelogramul $ABCD$ reprezentat în figura alăturată am notat cu O mijlocul diagonalei AC. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Dreptele BO şi DO sunt distincte.

b) Dreptele BO şi DO sunt identice.



5. În planul β reprezentat în figura alăturată desenaţi punctele distincte şi necoliniare A, B şi C şi dreptele determinate de acestea.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Desenaţi triunghiul DEF şi punctul G situat pe latura EF. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele D, E, F şi G.

7. Desenaţi triunghiul MNP şi punctul Q situat în interiorul acestuia. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele M, N, P şi Q.

8. Dacă punctele A, B şi C, respectiv B, C şi D sunt coliniare, arătaţi că A, B, C şi D sunt patru puncte coliniare.

9. Dacă punctele A, B, C şi D sunt vârfurile unui patrulater convex, stabiliţi numărul dreptelor determinate de acestea.

10. Se consideră triunghiul MNP şi punctele E şi F situate pe laturile MN, respectiv NP. Numiţi dreptele determinate de punctele M, N, P, E şi F.

11. În paralelogramul $ABCD$, notăm cu M mijlocul laturii CD şi cu N simetricul punctului A faţă de M. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D şi N.

12. Într-un plan se consideră cinci puncte, oricare trei dintre acestea fiind necoliniare. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de cele cinci puncte.

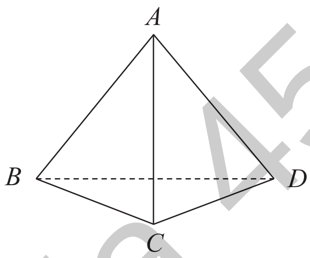
Lecţia 3. Tetraedrul şi piramida

Citesc şi reţin

Definiţie: Corpul geometric determinat de patru puncte necoplanare se numeşte **tetraedru**. Punctele A, B, C şi D se numesc **vârfurile** tetraedrului.

Segmentele AB, AC, AD, BC, CD şi DB se numesc **muchiile** tetraedrului.

Triunghiurile ABC, ACD, ADB şi BCD se numesc **feţele** tetraedrului.



Definiţie: Tetraedrul care are toate muchiile congruente se numeşte **tetraedru regulat**.

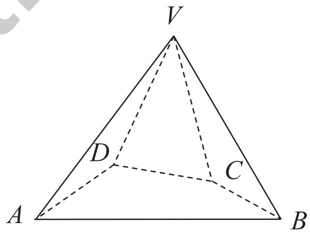
Definiţie: Corpul geometric determinat de vârfurile unui poligon convex, numit bază, şi de un punct nesituat în planul acestuia, numit vârf, se numeşte **piramidă**.

Observaţie: După numărul de laturi ale bazei, piramidele se numesc: triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale etc.

Punctul V este **vârful** piramidei, iar patrulaterul $ABCD$ este **baza** piramidei patrulatere din figura alăturată.

Segmentele VA, VB, VC şi VD se numesc **muchiile laterale** ale piramidei.

Triunghiurile VAB, VBC, VCD şi VDA se numesc **feţele laterale** ale piramidei.



Definiţie: O piramidă care are baza **poligon regulat** şi muchiile laterale congruente se numeşte **piramidă regulată**.

În figura 1 este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, iar în figura 2 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$.

Fig. 1

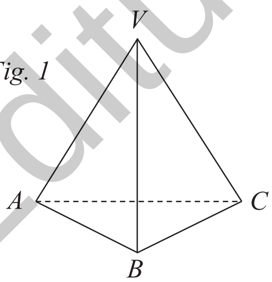
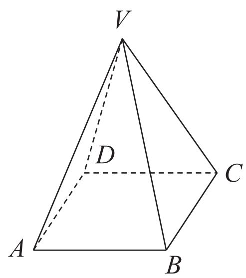
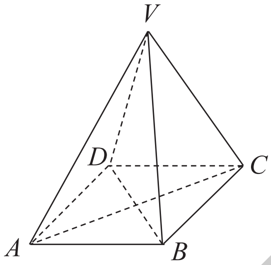


Fig. 2



Definiţie: Secţiunea diagonală a unei piramide patrulatere regulate este secţiunea realizată cu planul determinat de vârful piramidei şi o diagonală a bazei.

Triunghiurile isoscele şi congruente *VAC* şi *VBD* reprezintă secţiunile diagonale ale piramidei patrulatere regulate *VABCD* din figura alăturată.



Desfăşurarea în plan a unei piramide

În figura 3 este reprezentată desfăşurarea în plan a suprafeţei unei piramide triunghiulare regulate *VABC*, iar în figura 4 este reprezentată desfăşurarea în plan a suprafeţei unei piramide patrulatere regulate *VABCD*.

Fig. 3

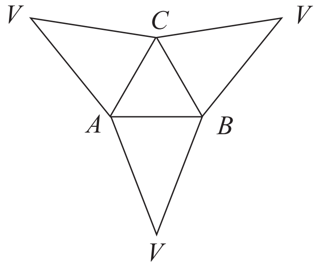
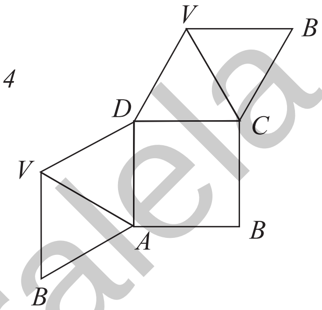


Fig. 4



Observaţie: Desfăşurarea în plan a suprafeţei unei piramide nu este unică.

Notaţii utilizate:

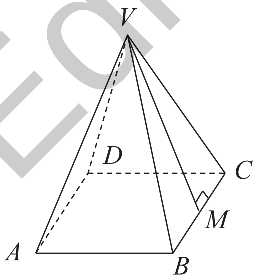
l – lungimea muchiei bazei, m – lungimea muchiei laterale, R – raza cercului circumscris bazei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{P}_f$ – perimetrul feţei laterale, $\mathcal{A}_f$ – aria feţei laterale, $\mathcal{P}_d$ – perimetrul secţiunii diagonale, $\mathcal{A}_d$ – aria secţiunii diagonale.

Cum se aplică?

1. O piramidă patrulateră regulată *VABCD* cu vârful în V are aria bazei egală cu 64 cm^2 şi muchia laterală de 5 cm. Aflaţi:

a) l; b) $\mathcal{P}_b$; c) $\mathcal{P}_f$; d) $\mathcal{A}_f$.

Soluţie:



a) Deoarece *ABCD* este pătrat, rezultă că $\mathcal{A}_b = l^2$, aşadar $l^2 = 64$ cm^2, deci $l = \sqrt{64}$ cm şi obţinem $l = 8$ cm;

b) $\mathcal{P}_b = 4l = 4 \cdot 8$ cm $= 32$ cm;

c) $\mathcal{P}_{VAB} = VA + AB + VB = 18$ cm;

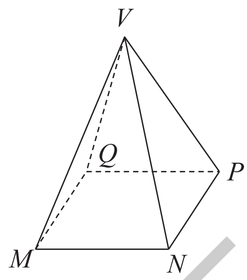
d) Construim $VM \perp BC$, $M \in BC$, deci $BM = CM = 4$ cm. În ΔVMC cu $\sphericalangle M = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $VC^2 = VM^2 + MC^2$, de unde obţinem $VM = 3$ cm.

$\mathcal{A}_f = \dfrac{BC \cdot VM}{2} = 12$ cm^2.

3. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VMNPQ$ cu vârful în V. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.

A. Patrulaterul $MNPQ$ este romb.

B. Patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.



4. În figura de la problema 3 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VMNPQ$ cu vârful în V. Completaţi tabelul:

Muchiile bazei	
Muchiile laterale	
Feţele laterale	

5. În figura de la problema 3 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VMNPQ$ cu vârful în V. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

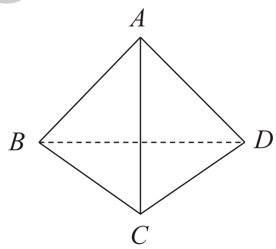
a) $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$; ☐ b) $VM \equiv VN \equiv VP \equiv VQ$. ☐

6. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „Dacă o piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală, atunci piramida este un tetraedru regulat.” ☐

7. În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$. Ştiind că suma lungimilor muchiilor tetraedrului este egală cu 12 cm, calculaţi:

a) $\mathcal{P}_{ABC}$ = ...;

b) $\mathcal{A}_{BCD}$ = ...



Exerciţii şi probleme de dificultate medie

8. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V are muchia bazei de 6 cm şi muchia laterală de 5 cm. Aflaţi:

a) $\mathcal{P}_b$; b) $\mathcal{A}_b$; c) $\mathcal{P}_l$; d) $\mathcal{A}_l$.

9. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are muchia bazei de 10 cm şi muchia laterală de 13 cm. Aflaţi:

a) $\mathcal{P}_b$; b) $\mathcal{A}_b$; c) $\mathcal{P}_l$; d) $\mathcal{A}_l$.

10. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V are perimetrul bazei egal cu 48 cm şi perimetrul unei feţe laterale egal cu 36 cm. Aflaţi:

a) l; b) m; c) $\mathcal{A}_b$; d) $\mathcal{A}_l$.

11. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are aria bazei egală cu 324 cm^2 şi perimetrul unei feţe laterale egal cu 48 cm. Aflaţi:

a) l; b) BD; c) m; d) $\mathcal{A}_l$.

12. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V are aria bazei egală cu $4\sqrt{3}$ cm^2 şi aria unei feţe laterale egală cu 8 cm^2. Aflaţi:

a) l; b) $\mathcal{P}_b$; c) m; d) $\mathcal{P}_l$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

21. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, în care notăm cu T mijlocul CC'. Dacă muchia bazei mici, muchia laterală şi muchia bazei mari au lungimile egale cu a, $2a$, respectiv $3a$, arătaţi că $\mathcal{P}_{AC'B} = \mathcal{P}_{ATB}$.

22. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară $ABCA'B'C'$, care are muchiile laterale congruente. Dacă notăm cu D şi E proiecţiile punctelor A' şi B' pe muchiile bazei mari, AC, respectiv BC, arătaţi că $DE = \dfrac{AB + A'B'}{2}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei mari de 8 cm, muchia bazei mici de 2 cm şi muchia laterală de 5 cm. Calculaţi:
a) $\mathcal{P}_B$; b) $\mathcal{A}_b$; c) a_t; d) $\mathcal{A}_f$.

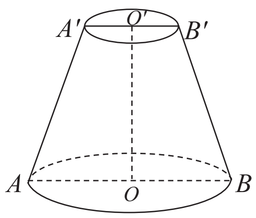
(3p) **2.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are muchia bazei mari de $8\sqrt{2}$ cm, muchia bazei mici de $4\sqrt{2}$ cm şi înălţimea de $2\sqrt{2}$ cm. Calculaţi:
a) $\mathcal{A}_d$; b) m; c) a_t.

(3p) **3.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $8\sqrt{3}$ cm, apotema de 6 cm şi înălţimea de $3\sqrt{3}$ cm. Notăm cu O centrul bazei mari. Calculaţi:
a) l; b) h; d) $d(O, A'A)$.

Lecţia 16. Trunchiul de con circular drept

Citesc şi reţin

Definiţie: Secţionând un con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei şi înlăturând conul mic care s-a format, se obţine un corp geometric numit **trunchi de con circular drept**.



Discurile mărginite de cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}(O', r)$ se numesc **baza mare**, respectiv **baza mică** a trunchiului de con circular drept.

Segmentele congruente $A'A$, $B'B$, ... se numesc **generatoarele** trunchiului de con circular drept.

Definiţie: Segmentul cu extremităţile în punctele de intersecţie dintre planele bazelor unui trunchi de con circular drept şi o perpendiculară comună a acestora se numeşte **înălţimea** trunchiului de con circular drept.

Observaţie: Segmentul determinat de centrele celor două baze ale unui trunchi de con circular drept este înălţimea acestuia.

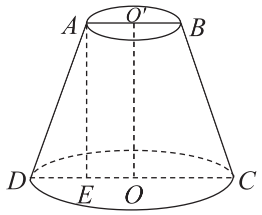
Segmentul $O'O$ este înălţimea trunchiului de con din figura de mai sus.

Definiţie: Secţiunea axială a unui trunchi de con circular drept este secţiunea realizată cu un plan care conţine înălţimea determinată de centrele celor două baze ale trunchiului de con.

Secţiunea axială a trunchiului de con din figura de mai sus este trapezul isoscel $A'ABB'$.

Notaţii utilizate:

R – raza bazei mari a trunchiului de con, r – raza bazei mici a trunchiului de con, g – lungimea generatoarei trunchiului de con, i – lungimea înălţimii trunchiului de con, G – lungimea generatoarei conului din care provine trunchiul de con, h – lungimea înălţimii conului din care provine trunchiul de con, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari a trunchiului de con, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici a trunchiului de con, $\mathcal{P}_a$ – perimetrul secţiunii axiale a trunchiului de con, $\mathcal{A}_a$ – aria secţiunii axiale a trunchiului de con, u – măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de disc obţinut prin desfăşurarea conului circular drept din care provine trunchiul de con.



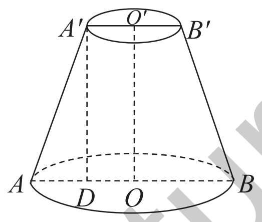
Într-un trunchi de con circular drept, aplicând teorema lui Pitagora şi ţinând seama de notaţiile făcute, obţinem:

- în ΔAED: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$.

Cum se aplică?

1. Un trunchi de con circular drept are $R = 7$ cm, $g = 13$ cm şi $i = 12$ cm. Calculaţi perimetrul secţiunii axiale.

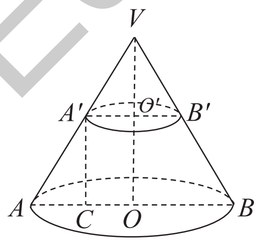
Soluţie:



În trunchiul de con circular drept din figura alăturată, trapezul isoscel $ABB'A'$ este o secţiune axială. Construim $A'D \perp AB$, $D \in AB$. În $\Delta A'DA$ cu $\sphericalangle D = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, deci $13^2 = 12^2 + (7 - r)^2$ sau $(7 - r)^2 = 25$, de unde rezultă că $7 - r = 5$ şi obţinem $r = 2$ cm; $\mathcal{P}_a = 2(R + r + g) = 2(7 + 2 + 13)$ cm $= 44$ cm.

2. Un trunchi de con circular drept are $R = 5$ cm, $r = 2$ cm şi $g = 3\sqrt{5}$ cm. Calculaţi înălţimea conului circular drept din care provine trunchiul de con.

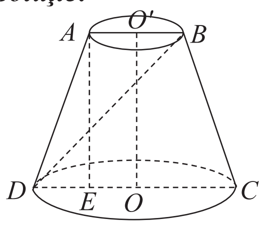
Soluţie:



În trunchiul de con circular drept din figura alăturată, trapezul isoscel $ABB'A'$ este o secţiune axială. Construim $A'C \perp AB$, $C \in AB$. În $\Delta AA'C$ cu $\sphericalangle C = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obţinem $i = 6$ cm. Dacă notăm cu V vârful conului din care provine trunchiul de con şi aplicăm teorema conurilor asemenea, rezultă că: $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'A'}{OA}$, deci $\frac{2}{5} = \frac{h-6}{h}$, de unde rezultă că $2h = 5h - 30$ sau $3h = 30$ şi obţinem $h = 10$ cm.

3. Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AB < CD$, este secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept. Știind că semidreapta DB este bisectoarea unghiului ADC, $R = 11$ cm, $g = 10$ cm, calculați înălțimea trunchiului de con.

Soluție:

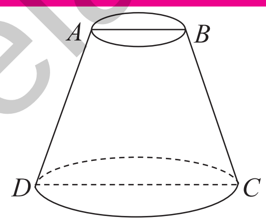


Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$, dar $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ADB$, deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB$, prin urmare $AB \equiv AD$ sau $2r = g$ și obținem $r = 5$ cm. Construim $AE \perp CD$, $E \in (CD)$. În ΔAED cu $\sphericalangle E = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, deci $10^2 = i^2 + 6^2$ și după efectuarea calculelor obținem $i = 8$ cm.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Secțiunea axială a trunchiului de con circular drept reprezentat în figura alăturată este ....



2. Calculați perimetrul secțiunii axiale a trunchiului de con circular drept reprezentat în figura de la problema precedentă, știind că:

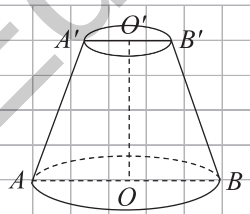
a) $R = 5$ cm, $r = 3$ cm și $g = 7$ cm; b) $R = 6$ cm, $r = 3$ cm și $g = 9$ cm.

b)

3. Calculați aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept, în următoarele cazuri:

a) $R = 7$ cm, $r = 4$ cm și $i = 8$ cm; b) $R = 6$ cm, $r = 3$ cm și $i = 7$ cm.

b)



Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

(*Capitolele: Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$, Calcul algebric în $\mathbb{R}$, Elemente ale geometriei în spaţiu*)

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Numărul întreg –4 aparţine intervalului:
A. $(-4; 1)$; B. $[-3; 4)$; C. $[-4; 1]$; D. $(-4; 3)$.

(7p) **2.** Rezultatul calculului $(-9x^5) : (3x) + (2x^2)^2$ este egal cu:
A. $3x^3$; B. $-x^2$; C. $2x^5$; D. $-x^4$.

(7p) **3.** Dacă descompunem în factori suma algebrică $x^2 - 49$, obţinem:
A. $7(x^2 - 7)$; B. $(x - 7)(x + 7)$; C. $(x - 4)(x + 9)$; D. $x(x - 49)$.

(7p) **4.** Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Planele $(D'DE)$ şi $(F'FE)$ sunt:
A. identice; B. secante; C. paralele.

(7p) **5.** Perimetrul secţiunii axiale a unui cilindru circular drept cu $R = 3$ cm şi $G = 8$ cm este egal cu:
A. 28 cm; B. 18 cm; C. 24 cm; D. 32 cm.

(7p) **6.** Rezultatul calculului $3x(x + 2) - (x - 2)(3x + 1)$ este egal cu:
A. $x^2 - 4x$; B. $11x + 2$; C. $13x - 1$; D. $x^2 + 4x$.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(8p) **1.** Se consideră intervalele de numere reale $E = (-2; \sqrt{3})$ şi $F = [-\sqrt{3}; 2]$. Determinaţi intervalele $E \cup F$ şi $E \cap F$.

(8p) **2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{1}{4} - \frac{7x}{10} \geq \frac{4x}{5}$.

(8p) **3.** Se consideră expresia $E(x) = 5(x + 1)^2 - (2x - 3)^2 + (1 - x)(x + 1) - 22x$, $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că expresia $E(x)$ nu depinde de x, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(8p) **4.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm şi $AA' = 4$ cm. Calculaţi aria patrulaterului $ABC'D'$.

5. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchia de 24 cm şi punctul E situat pe muchia AD, astfel încât $AD = 4AE$. Notăm cu F simetricul punctului E faţă de A, iar cu M şi N proiecţiile punctului F pe muchiile BD, respectiv CD. $AB \cap FM = \{Q\}$ şi $AC \cap FN = \{P\}$.

(8p) a) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele PQ şi CD.

(8p) b) Calculaţi perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Notă (pentru testele 1 – 3): Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

Testul 1

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Numărul de 10 ori mai mare decât 0,123 este egal cu:
a) 1230; b) 1,23; c) 12,3; d) 123,0.

(5p) **2.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 şi 60 este egal cu:
a) 24; b) 9; c) 6; d) 12.

(5p) **3.** Într-o mare situată la altitudinea de –21m a fost scufundată la adâncimea de 17 m o cameră de luat vederi. Altitudinea camerei de luat vederi este egală cu:
a) –5 m; b) –24 m; c) –38 m; d) –7 m.

(5p) **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $4\sqrt{5}, 5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{5}, 6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$;
c) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}$.

(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt prezentate notele unui elev din clasa a VIII-a la Educaţie fizică. Media elevului la Educaţie fizică a fost:

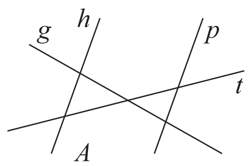
Nota	6	9	10
Numărul de note	1	3	1

a) 6; b) 7; c) 8; d) 9.

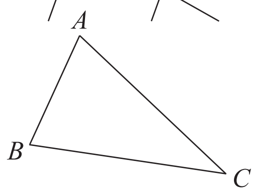
(5p) **6.** Radu afirmă că „suma a două numere naturale impare este un număr natural impar”. Afirmaţia lui Radu este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.

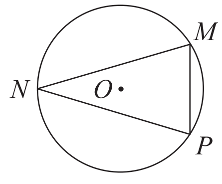
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele *g*, *h*, *p* şi *t*. Dintre cele patru drepte, cele paralele sunt:
a) *g* şi *h*; b) *h* şi *p*;
c) *p* şi *t*; d) *t* şi *g*.



(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul *ABC*. Dacă $AB < BC < CA$, atunci:
a) $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$; b) $\sphericalangle A < \sphericalangle B < \sphericalangle C$;
c) $\sphericalangle B < \sphericalangle C < \sphericalangle A$; d) $\sphericalangle C < \sphericalangle B < \sphericalangle A$.

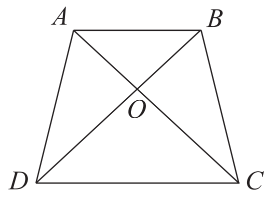


(5p) **3.** Pe cercul de centru *O* şi rază *R* din figura alăturată sunt reprezentate punctele *M*, *N* şi *P*. Dacă $R = 3\sqrt{7}$ cm şi măsura unghiului *MNP* este egală cu 30°, atunci lungimea coardei *MP* este de:
a) $7\sqrt{3}$ cm; b) 3 cm;
c) 7 cm; d) $3\sqrt{7}$ cm.



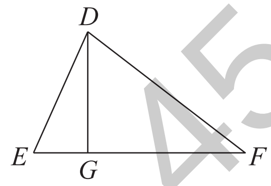
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathcal{P}_{AOD} = 23$ cm şi $\mathcal{P}_{BCD} = 41$ cm, atunci lungimea bazei mari CD este egală cu:

a) 10 cm; b) 18 cm;
c) 15 cm; d) 12 cm.



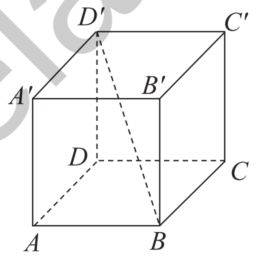
(5p) **5.** Triunghiul DEF dreptunghic în D din figura alăturată reprezintă traseul unui autobuz, iar punctele D, E, G şi F sunt staţiile în care acesta opreşte. Dacă $DG \perp EF$, $\operatorname{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$ şi $DG = 6$ km, atunci distanţa dintre staţiile E şi F este egală cu:

a) $6\sqrt{3}$ km; b) $7\sqrt{3}$ km;
c) $8\sqrt{3}$ km; d) $9\sqrt{3}$ km.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub notat $ABCDA'B'C'D'$. Dacă muchia lui este de $5\sqrt{2}$ cm, atunci lungimea proiecţiei diagonalei BD' pe planul $(B'BC)$ este egală cu:

a) 15 cm; b) $10\sqrt{2}$ cm;
c) $12\sqrt{2}$ cm; d) 10 cm.



Subiectul al III-lea. Scrieţi rezolvările complete.

1. Se consideră intervalele de numere reale $A = (-4; 1]$ şi $B = (-3; 3)$.

(3p) a) Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul $A \cup B$.

(2p) b) Determinaţi cardinalul mulţimii $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in A \cap B\}$.

2. Vârstele a trei fraţi sunt direct proporţionale cu numerele 6, 7 şi 9, iar diferenţa de vârstă dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre fraţi este de 6 ani.

(3p) a) Aflaţi vârsta fratelui mai mare şi vârsta fratelui mai mic.

(2p) b) Calculaţi diferenţa de vârstă dintre fratele mijlociu şi fratele mai mic.

3. Se consideră expresia $E(x) = (x-2)^2 - (x-1)^2 + (x-2)(x+2) + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

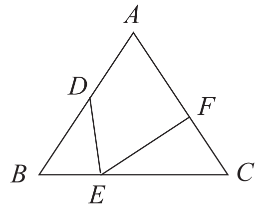
(2p) a) Arătaţi că $E(x) = x^2 + x - 1$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, $E(n)$ este număr întreg impar.

4. Triunghiul echilateral ABC din figura alăturată reprezintă schematic un zmeu din carton, pe care un elev a construit segmentele DE şi EF. Se ştie că $DB = 4$ cm, $BE = 2$ cm, $EC = 6$ cm şi $\Delta DBE \sim \Delta ECF$.

(2p) a) Calculaţi lungimea segmentului CF.

(3p) b) Determinaţi măsura unghiului DEF.



INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

Testul 1

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	A	C	C	C	A	D	B	C

Partea a II-a

1. $S = \{(3; -1)\}$. **2.** a) $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$; b) $x^{-1} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$; $m_a(x; x^{-1}) = \frac{7\sqrt{6}}{12}$. **3.** a) $\mathcal{P}_{ABC} = 24$ cm; b) $r = \frac{AB + AC - BC}{2} = 2$ cm; c) $\mathcal{A}_d = 4\pi$ cm^2.

Testul 2

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	B	B	D	C	C	B	A	B

Partea a II-a

1. $x = -\frac{5}{4}$. **2.** a) $A \times B = \{(-1; -2), (-1; 2), (3; -2), (3; 2)\}$; b) $\mathcal{A} = 16$ u^2. **3.** a) $AE = 6$ cm, $AF = 5$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 60$ cm^2; c) $\mathcal{A}_{AEF} = 7{,}5$ cm^2.

Testul 3

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	B	D	B	A	C	B	C	D

Partea a II-a

1. $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$. **2.** a) $y = \sqrt{6}$; b) $x = 6\sqrt{6}$; $m_g(x; y) = 6$. **3.** a) $\mathcal{A}_{ABCD} = 64$ cm^2; b) $BE = 6$ cm şi, aplicând teorema lui Pitagora în ΔBCE, obținem $CE = 10$ cm, deci $\mathcal{P}_{EBC} = 24$ cm; c) Construim $DF \perp CE$. $\Delta EBC \sim \Delta CFD$ şi obținem $DF = 6{,}4$ cm.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I – INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

1. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; c) $C = \{0, 1, 2\}$; d) $D = \{2, 3, 4, 5\}$. **2.** a) $A = \{$g, e, o, m, t, r, i, a$\}$, card $A = 8$; b) $B = \{7, 0, 1, 2, 3, 4, 8\}$, card $B = 7$. **3.** a) $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, card $E = 5$; b) $F = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, card $F = 6$. **4.** a) $A = \left\{\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, card $A = 5$; b) $B = \left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}\right\}$, card $B = 4$. **5.** $E = \{$t, e, r, a, d, u$\}$, $F = \{$c, i, l, n, d, r, u$\}$; a) $E \cup F = \{$t, e, r, a, d, u, c, i, l, n$\}$; b) $E \cap F = \{$r, d, u$\}$; c) $E \setminus F = \{$t, e, a$\}$; d) $F \setminus E = \{$c, i, l, n$\}$. **6.** a) $C \cup D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $C \cap D = \{1, 2\}$; $C \setminus D = \{3, 4, 5\}$; $D \setminus C = \{-2, -1, 0\}$; b) $C \cup D =$

$\in \left[\frac{4}{5};+\infty\right)$. **21.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = 4$; d) $x = -4$. **22.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = -4$; d) $x = -3$. **23.** a) $x \in (-3; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 5)$; c) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; d) $x \in \left(\frac{6}{5};+\infty\right)$. **24.** i) a) $x \in (-2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; b) $x \in [-\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; c) $x \in (-\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$; d) $x \in [\sqrt{6}; 3\sqrt{6}]$; e) $x \in (2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; f) $x \in [\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; ii) a) $x \in \left(-\frac{1}{12}; \frac{19}{12}\right)$; b) $x \in \left(-\frac{23}{12}; \frac{41}{12}\right)$; c) $x \in \left[-\frac{14}{9}; \frac{10}{9}\right]$; d) $x \in (-8\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$; e) $x \in [3\sqrt{3}; 9\sqrt{3}]$; f) $x \in (8\sqrt{7}; 16\sqrt{7})$. **25.** a) $x = -3$; b) $x = -2$. **26.** $x \in (-\infty; 4+2\sqrt{5})$; $4+2\sqrt{5} > 4+2\sqrt{4} = 8$, deci $x = 8$. **27.** a) $x \in (2; 4)$; b) $x \in [-3; -1]$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x = (-\infty; 1)$; b) $x \in (-4; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 2\sqrt{5}]$. **2.** a) $x = (-\infty; 12)$; b) $x \in (-\infty; -5]$. **3.** $x = -2$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. a) $E \cup F = [-5; \sqrt{5})$; b) $E \cap F = (-2\sqrt{6}; 2)$; c) $E \setminus F = [-5; -2\sqrt{6}] \cup [2; \sqrt{5})$; d) $F \setminus E = \varnothing$. **6.** $A = [-2; 3]$, deci card$(A \cap B) = 3$. **Testul 2. 5.** Observăm că $c > 4$ și u$(c^3) = c$, prin urmare $c \in \{5, 6, 9\}$; $A = \{125, 216, 729\}$; $n = 2^{\text{card } A} = 8$ submulțimi. **6.** $E = [-2; +\infty)$ și $F = (-\infty, 3)$; $E \cup F = \mathbb{R}$; $E \cap F = [-2; 3)$; $E \setminus F = [3; +\infty)$; $F \setminus E = (-\infty; -2)$. **Testul 3. 5.** $x \in \left[-\frac{9}{5};+\infty\right)$, deci cel mai mic număr întreg care verifică inecuația este -1. **6.** $A = (-\sqrt{3}; +\infty)$ și $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, deci card$(A \cap B) = 3$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. **2.** F. **3.** A. **II. 1.** $[-3; 0]$. **2.** 0. **3.** $(-\infty; -1]$. **III. 1.** C. -5. **2.** A. 6. **3.** D. $(-\infty; -12]$. **IV.** $E \cup F = \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$; $E \cap F = (-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$; $E \setminus F = \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$; $F \setminus E = \left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right]$. **V.** a) $A = [32; 98]$; b) $b = \frac{9a-3}{a+9}$, de unde rezultă că $a \in \{3, 5\}$, prin urmare $B = \{32, 53\}$, deci $B \subset A$.

Capitolul II – Calcul algebric în $\mathbb{R}$

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

1. a) Coeficientul este 38, iar partea literală este x^5; b) Coeficientul este $-\frac{7}{8}$, iar partea literală este y^3; c), d), e), f), g), h) Analog. **2.** a) $3x^2 - 8x + 29$; b) $-4x^2 + 35x - 7$; c) $2y^4 - \sqrt{2}y^3 + 4y - 21$; d) $-9y^5 + \sqrt{5}y^3 - y^2 - 16$. **3.** a) $-3x^5$; b) $11x^2$; c) $4z^3$; d) $-21z$; e) $9y^4$; f) $-\frac{1}{4}y$; g) $\sqrt{2}t$; h) $\frac{7}{3}t^5$. **4.** a) $7x$; b) $5x$; c) $3x$; d) $11x^2$; e) $11x^2$; f) $2x^2$; g) $-8x^2$; h) $28x^2$; i) $6x^3$. **5.** a) $9a$; b) $5a$; c) $-23a^2$; d) $2a^2$; e) $3a^3$; f) $4a^3$. **6.** a) $2x + 1$; b) $-6x - 4$; c) $-9x + 7$; d) $10x - 9$; e) $-6x + 2$; f) $-2x + 6$; g) $-4x^2 - 4x$; h) $-14x^2 - 3x$; i) $16x^2 + 6x$. **7.** a) $5x^2 - 6x$; b) $4x^2 - x$; c) $25x^3 - 8x$; d) $-21x^3 + 6x$; e) $-12x^4 + x^2$; f) $-12x^4 + 4x^2$. **8.** a) $-3y^3 - 10y$; b) $-8y^4 - 3y$; c) $3y^5 - 6y$; d) $-8y^3 + 4y$; e) $-4y^4 - 3y^2$; f) $-23y^5 - 3y^3$. **9.** a) $5x^2 + 2x - 6$; b) $-4x^2 - 2x - 5$; c) $-3x^2 + 5x + 13$; d) $-11x^2 - 6x + 2$; e) $-9x^2 -$

c) $\frac{x+2}{7x^3}$. **18.** a) $\frac{3x-2}{4x^2-x^3}$; b) $\frac{2x^2-7x}{3}$; c) $\frac{3-5x}{3x^4+x^3}$. **19.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x-1}{x+2}$; c) $\frac{x-3}{x-5}$; d) $\frac{x+3}{x+5}$. **20.** a) $\frac{x-3}{4x}$; b) $\frac{3x^2}{x+1}$; c) $\frac{x-2}{2x^3}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{2x-3}{2x^2+x}$; b) $\frac{2}{x^2}$. **2.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x^2-x}{x+3}$. **3.** a) $\frac{x+1}{5x-x^2}$; b) $\frac{x+3}{4x}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $\frac{21x^2+3x}{6x^4-6x^2}$, $\frac{x^2-2x+1}{6x^4-6x^2}$. **6.** $\frac{x+1}{x}$. **Testul 2. 5.** $\frac{4x^3+8x^2}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$, $\frac{x^2-9}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$. **6.** $\frac{4x+5}{6x^2-3x}$. **Testul 3. 5.** $\frac{2x^2}{x-3}$. **6.** $\frac{3x^3-12x^2+12x}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{x^3-2x^2-x+2}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{4x^2+4x-8}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** F. **II. 1.** $\frac{2x}{3}$. **2.** $6x^2$. **3.** $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$. **III. 1.** B. $\mathbb{R}\setminus\{-6, 0\}$. **2.** C. $\frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2+x}$. **3.** D. $\frac{x-1}{4x^2}$. **IV.** $\frac{3x^2-12x+12}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$, $\frac{x^3-x}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$. **V.** a) $E(x)=\frac{3}{x+2}$; b) $F(x)=$ $=\frac{x-3}{x(x+1)}$; $E(x)=\frac{3x^2+3x}{x(x+1)(x+2)}$, $F(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x+1)(x+2)}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I – ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

Lecţia 1. Puncte, drepte, plane: convenţii de notare, reprezentări, determinarea dreptei

2. a) A; b) A. **3.** a) A; b) A. **4.** a) F; b) A. **6.** 4 drepte. **7.** 6 drepte. **8.** Observăm că $A \in BC$ şi $D \in BC$, deci A, B, C, D sunt coliniare. **9.** 6 drepte. **10.** MN, NP, PM, MF, PE, EF. **11.** 8 drepte. **12.** 10 drepte. **13.** a) O dreaptă, când cele 5 puncte sunt coliniare; b) 10 drepte, când oricare 3 dintre cele 5 puncte sunt necoliniare. **14.** Se arată că $EC \parallel BD$ şi $FC \parallel BD$, deci E, C şi F sunt coliniare. **15.** 8 drepte. **16.** Se arată că $\sphericalangle EAF = 180°$, deci E, A şi F sunt coliniare; 11 drepte. **17.** $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. Observăm că $Q \notin MN$, deci M, N, Q sunt necoliniare. **2.** a) O dreaptă, când cele 4 puncte sunt coliniare; b) 6 drepte, când oricare 3 dintre cele 4 puncte sunt necoliniare. **3.** Se arată că $EC \parallel BD$ şi $FC \parallel BD$, deci E, C şi F sunt coliniare.

Lecţia 2. Determinarea planului. Relaţii între puncte, drepte şi plane

1. a) Planul determinat de punctele D, E şi F; b) Planul determinat de dreptele g şi h; d) Planul determinat de dreapta a şi punctul M. **2.** a) (MNP); b) $(g; T)$; c) $(d; g)$; d) $(c; d)$. **3.** F. **4.** B. $T \notin g$. **5.** a) A; b) F; c) A; d) A. **6.** $a \cap b = \{D\}$; există punctele $E \in a$ şi $F \in b$, diferite de D, prin urmare planul (DEF) include dreptele a şi b, deci acestea determină planul (DEF). **7.** $a \parallel b$; există punctele $A, B \in a$ şi $C, D \in b$, astfel încât $AC \cap BD = \{E\}$, prin urmare planul $(AC; BD)$ include dreptele a şi b, deci acestea determină planul $(AC; BD)$. **8.** 4 plane. **9.** 7 plane. **10.** $AC \cap BD = \{O\}$, deci $BO \equiv DO$. Punctul G este centru de greutate în ΔTAC, prin urmare $TG \cap BD = \{O\}$, aşadar punctele T, G, B şi D sunt coplanare. **11.** $CE \parallel BD$ şi $CF \parallel BD$, deci punctele E, C şi F sunt coliniare, prin urmare punctele T, E, C şi F sunt coplanare. **12.** a) Un plan, când punctele M, N, P, Q şi T sunt coliniare; b) 11 plane, când oricare 3 dintre punctele M, N, P, Q şi T sunt necoliniare. **13.** $AN \cap BP \cap CM = \{G\}$, deci cele 3 plane au în comun dreapta DG. **14.** Dacă notăm cu O centrul hexagonului, atunci $AD \cap BE \cap CF = \{O\}$, deci cele 3 plane au în comun dreapta GO. **15.** $AC \cap BD = \{O\}$; $\Delta AMO \sim \Delta CNO$, de unde rezultă că $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle CON$, deci punctele M, O şi N sunt coliniare, prin urmare planele (PAC), (PMN) şi (PBD) au în comun dreapta PO. **16.** $\frac{(n-1)n}{2} = 10^p$ sau $(n-1)n = 2^{p+1} \cdot 5^p$, egalitate care este adevărată pentru $p = 1$, prin urmare $n = 5$. **17.** $AC \cap BD = \{T\}$; $AD \perp TB$ şi $BC \perp TA$, deci punctul E este ortocentrul ΔTAB, prin urmare $TE \perp AB$, aşadar punctele T, E şi F sunt coliniare, deci dreptele AC şi BD rămân concurente după îndoirea semidiscului, iar punctele A, B, C şi D rămân coplanare.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. (DEF), (NED), (NFD), (NEF) şi (NEM). **2.** a) Un plan, când punctele A, B, C şi D sunt coliniare; b) 7 plane, când oricare 3 dintre punctele A, B, C şi D sunt necoliniare. **3.** $PE \parallel NQ$ şi $PF \parallel NQ$, deci punctele E, P şi F sunt coliniare, prin urmare punctele A, E, P şi F sunt coplanare.

Lecţia 3. Tetraedrul şi piramida

1. C. ΔDEF. **2.** a) F; b) A; c) A; d) A. **3.** B. $MNPQ$ este pătrat. **4.** Muchiile bazei: MN, NP, PQ, QM. Muchiile laterale: VM, VN, VP, VQ. Feţele laterale: ΔVMN, ΔVNP, ΔVPQ, ΔVQM. **5.** a) A; b) A. **6.** A. **7.** a) $\mathcal{P}_{ABC} = 6$ cm; b) $\mathcal{A}_{BCD} = \sqrt{3}$ cm^2. **8.** a) $\mathcal{P}_{ABC} = 18$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABC} = 9\sqrt{3}$ cm^2; c) $\mathcal{P}_{VAB} = 16$ cm; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 12$ cm^2. **9.** a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 40$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 100$ cm^2; c) $\mathcal{P}_{VAB} = 36$ cm; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 60$ cm^2. **10.** a) $AB = 16$ cm; b) $VA = 10$ cm; c) $\mathcal{A}_{ABC} = 64\sqrt{3}$ cm^2; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 48$ cm^2. **11.** a) $AB = 18$ cm; b) $BD = 18\sqrt{2}$ cm; c) $VA = 15$ cm; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 108$ cm^2. **12.** a) $AB = 4$ cm; b) $\mathcal{P}_{ABC} = 12$ cm; c) $VA = 2\sqrt{5}$ cm; d) $\mathcal{P}_{VAB} = 4(1+\sqrt{5})$ cm. **13.** a) $AB = 4\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{P}_{ABCD} = 16\sqrt{2}$ cm; c) $\mathcal{A}_{ABCD} = 32$ cm^2; d) $\mathcal{P}_{VAB} = 12\sqrt{2}$ cm. **14.** a) $\mathcal{P}_d = 12$ cm; b) $\mathcal{P}_b = 8\sqrt{2}$ cm; c) $\mathcal{A}_b = 8$ cm^2; d) $\mathcal{P}_f = 2(4+\sqrt{2})$ cm; e) $\mathcal{A}_f = 2\sqrt{7}$ cm^2. **15.** a) $\sphericalangle BVC = 60°$; b) $\sphericalangle VAC = 60°$. **16.** Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$. Secţionând după muchiile AB, AC şi AD, observăm că $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC + \sphericalangle ABC = 180°$, deci triunghiul este echilateral. **17.** $MN \parallel VB \parallel PQ$, deci M, N, P şi Q sunt coplanare; $MNPQ$ este paralelogram şi $\mathcal{P}_{MNPQ} = 13$ cm. **18.** a) Desfăşurând în plan suprafaţa laterală a piramidei $VABC$, observăm că lungimea celui mai scurt drum este egală cu lungimea segmentului MN. Din ΔMVN rezultă că $MN = 4$ dm; b) $VMBN$ este pătrat, deci $VT \equiv BT$. **19.** Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V. $AC \cap BD = \{O\}$. $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{AVC}$, deci $DO \equiv VO$, prin urmare $\Delta AOD \equiv \Delta AOV$, adică $AD \equiv AV$. **20.** Desfăşurând în plan suprafaţa tetraedrului $ABCD$, observăm că $\sphericalangle BAM = 90°$, deci lungimea celui mai scurt drum este $BA = 3$ m. **21.** a) $VM = MN = VN = \frac{l}{2}$; b) $\mathcal{A}_{VAB} + \mathcal{A}_{VBC} + \mathcal{A}_{VCA} = 3\frac{m^2}{2}$; $l = m\sqrt{2}$,

Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

Testul 1. I. 1. C. $[-4; 1]$. **2.** D. $-x^4$. **3.** B. $(x-7)(x+7)$. **4.** B. secante. **5.** A. 28 cm. **6.** B. $11x+2$. **II. 1.** $E \cup F = (-2; 2]$, $E \cap F = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$. **2.** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$. **3.** $E(x) = 5(x^2+2x+1) - (4x^2 - 12x + 9) + 1 - x^2 - 22x = 5x^2 + 10x + 5 - 4x^2 + 12x - 9 + 1 - x^2 - 22x = -3$. **4.** $\mathcal{A}_{ABC'D'} = AB \cdot BC' = 10\text{ cm}^2$. **5.** a) $AF = AP = AQ = 6$ cm, deci $PQ \parallel BC$, prin urmare $\sphericalangle(PQ, CD) = \sphericalangle BCD = 60°$; b) $PQ \parallel (BCD)$, deci $PQ \parallel MN$, prin urmare $MNPQ$ este trapez isoscel; $\mathcal{P}_{MNPQ} = 3(7+6\sqrt{3})$ cm.

Testul 2. I. 1. D. -7. **2.** B. $-x^3$. **3.** C. $3x^2(2x-3)$. **4.** C. necoplanare. **5.** A. 19 cm. **6.** D. $-x^2+6$. **II. 1.** $E \cup F = \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right]$, $E \cap F = \left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$. **2.** $x \in [-\sqrt{10}; +\infty)$. **3.** $E(x) = (x+2)(x^2-2x+1) + x(4-x^2) - 7x = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 + 4x - x^3 - 7x = -6x + 2$; $E(n) = 2(1-3n) \,\vdots\, 2$. **4.** $h = 4$ cm. **5.** a) $\sphericalangle(B'C, O'D) = \sphericalangle A'DO' = 30°$; b) Construim $BE \perp O'D$. Din egalitatea $\mathcal{A}_{B'BDO'} = \mathcal{A}_{B'BO'} + \mathcal{A}_{O'BD}$ rezultă că $BE = 4\sqrt{3}$ cm.

Testul 3. I. 1. A. 0. **2.** D. $-3x$. **3.** B. x^2+2x+1. **4.** C. $(C'CD)$. **5.** D. 15 cm. **6.** B. $2x-3$. **II. 1.** $E \cup F = [-4; 5]$, $E \cap F = (-2; 5)$. **2.** $x \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right]$; $x = -3$. **3.** Notăm $x^2 - x = a$; $E(x) = a(a-5) + 6 = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3) = (x^2-x-2)(x^2-x-3) = (x-2)(x+1)(x^2-x-3)$. $E(a) = (a-2)(a+1)(a^2-a-3)$. Observăm că: pentru $a = 3k+2$, $a-2 \,\vdots\, 3$, pentru $a = 3k+1$, $a^2 - a - 3 \,\vdots\, 3$, pentru $a = 3k$, $a^2-a-3 \,\vdots\, 3$, prin urmare $E(a) \,\vdots\, 3$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$. **4.** $R = 6$ cm, $G = 9$ cm, $h = 3\sqrt{5}$ cm. **5.** a) $AC \cap BD = \{O\}$; $\sphericalangle(AB, VM) = \sphericalangle VMO = 60°$; b) $l = a_p = 8$ cm, $h = 4\sqrt{3}$ cm, $\mathcal{A}_d = 16\sqrt{6}\text{ cm}^2$.

Modele de teste pentru Evaluarea Naţională

Testul 1

Subiectul I

1. b) 1,23 *(5p)*. **2.** d) 12 *(5p)*. **3.** c) -38 m *(5p)*. **4.** c) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ *(5p)*. **5.** d) 9 *(5p)*. **6.** b) falsă *(5p)*.

Subiectul al II-lea

1. b) h şi p *(5p)*. **2.** a) $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$ *(5p)*. **3.** d) $3\sqrt{7}$ cm *(5p)*. **4.** b) 18 cm *(5p)*. **5.** c) $8\sqrt{3}$ cm *(5p)*. **6.** d) 10 cm *(5p)*.

Subiectul al III-lea

1. a) -3 *(3p)*; b) card $E = 4$ *(2p)*. **2.** a) $\frac{a}{6} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = k$, $a = 6k$, $b = 7k$, $c = 9k$, $c - a = 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$, deci $c = 18$ ani şi $a = 12$ ani *(3p)*; b) $b = 14$ ani; $b - a = 2$ ani *(2p)*. **3.** a) $E(x) = x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 + 3x = x^2 + x - 1$ *(2p)*; b) $E(n) = n^2 + n - 1$; deoarece n^2 şi n au aceeaşi paritate, rezultă că $n^2 + n$ este par, deci $n^2 + n - 1$ este număr impar *(3p)*. **4.** a) $\frac{DB}{EC} = \frac{BE}{CF}$, de unde obţinem $CF = 3$ cm *(2p)*; b) $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CEF$; $\sphericalangle BED + \sphericalangle CEF = 120°$, deci $\sphericalangle DEF = 60°$ *(3p)*. **5.** a) $BD^2 = AB^2 + AD^2$, de unde obţinem $BD = 25$ cm; d$(A, BD) = AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = 12$ cm *(2p)*; b) $AE = CF = 12$ cm şi $AE \parallel CF$, deci $AECF$ este paralelogram; $EF = BD - DE - BF = 7$ cm;

Cuprins