Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VII-a

ediția a V-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Andreea Roșca, Ramona Rossall
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZANOSCHI, ADRIAN
Matematică : aritmetică, geometrie : clasa a VII-a / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa. – Ed. a 5-a. – Pitești : Paralela 45, 2024
ISBN 978-973-47-4106-9

I. Iurea, Gheorghe
II. Popa, Gabriel

51

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicației MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000+ Standard”, adresată elevilor de clasele V-VIII, a apărut din necesitatea sistematizării și a interpretării creative și aplicative a noțiunilor din noua programă de studiu, în scopul armonizării practicii școlare cu setul de competențe impus de programă și cu specificul subiectelor de examen. Prin ea se urmărește trecerea de la formarea noțiunilor și a deprinderilor elementare de operare cu acestea, la dezvoltarea raționamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele și noțiunile abstracte firești domeniului astfel încât elevul să vadă și să exerseze aplicațiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situația de a adapta aparatul teoretic la necesitățile și la provocările vieții de zi cu zi. Învățarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută și necesară.

Fiecare volum începe cu recapitularea materiei din clasa anterioară, dublată de testele inițiale elaborate în acord cu gradul de dificultate al Evaluării Naționale. Capitolele sunt împărțite în lecții care pot fi parcurse în 1-3 ore și se încheie, fiecare, cu câte trei teste sumative ce oferă o imagine fidelă a nivelului de pregătire la care se află, etapă cu etapă, elevii. Lecțiile încep cu o expunere detaliată și temeinică a părții teoretice, fapt care asigură o anumită autonomie a lucrării față de alte auxiliare didactice. Urmează un număr de probleme reprezentative pentru tematica lecției, însoțite de rezolvări punctuale, care se constituie în modele de redactare a răspunsurilor. Problemele propuse sunt gândite gradual, atât ca dificultate, cât și din punct de vedere metodic, încât profesorul să le adapteze în mod nuanțat ritmului de pregătire al elevilor. Ele respectă, totodată, pragurile de dificultate specifice subiectelor de la Evaluarea Națională, iar cele care depășesc acest nivel – puține la număr - sunt semnalate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, răspunsuri sau soluții. În plus, volumul pentru clasa a VIII-a are, în ultima parte, teme recapitulative din materia claselor V-VII, gândite în spiritul subiectelor de Evaluare Națională.

Sperăm că lucrările din seria „Mate 2000+ Standard” vor aduce bucuria învățării pentru elevii cărora se adresează, iar colegii noștri profesori vor găsi în ele instrumente utile pentru îndrumarea copiilor. Succes tuturor!

Autorii

PROBLEME RECAPITULATIVE CLASA A VI-A

ARITMETICĂ

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < 3x - 2 < 28\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

2. Determinați mulțimile X și Y, știind că $X \cup Y = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $X \cap Y = \{5, 7, 9\}$ și $X \setminus Y = \{1, 10\}$.

3. Fie A și B două mulțimi, astfel încât card $A = 25$, card $B = 36$ și card$(A \cap B) = 20$. Aflați card$(A \cup B)$.

4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Scrieți toate submulțimile mulțimii A care au două elemente și suma acestora este număr impar.

b) Câte submulțimi cu cinci elemente are A?

c) Câte submulțimi are, în total, mulțimea A?

5. Descompuneți în factori primi numerele naturale: $a = 72$, $b = 75$, $c = 91$ și $d = 138$. Care dintre aceste numere are mai mulți divizori naturali?

6. Determinați cel mai mare număr natural n, astfel încât 5^n să dividă numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 49 \cdot 50$.

7. Fie numerele naturale $a = 168$ și $b = 180$. Calculați cel mai mare divizor comun al numerelor a și b și cel mai mic multiplu comun al lor.

8. Aflați câți divizori comuni au numerele 126 și 420.

9. Numerele 248 și 107, împărțite la numărul natural nenul n, dau resturile 14, respectiv 17. Aflați numărul n.

10. Scrieți toți multiplii comuni ai numerelor 24 și 36 care sunt mai mici decât 300.

11. Aflați care este cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 8 elevi, de câte 12 elevi și de câte 18 elevi.

12. Ana are mai multe mere. Dacă le grupează câte trei sau câte patru, îi rămâne, de fiecare dată, câte un măr în plus. Dacă taie fiecare măr în patru, obține mai puțin de 100 de felii. Câte mere are Ana?

GEOMETRIE

1. Aflați măsura unui unghi, știind că măsura complementului său este un sfert din măsura suplementului său.

2. Se consideră un unghi AOB având măsura de $88°$. Fie OC semidreapta opusă semidreptei OA și OM, ON bisectoarele unghiurilor AOB, respectiv BOC.

a) Determinați măsura unghiului MON.

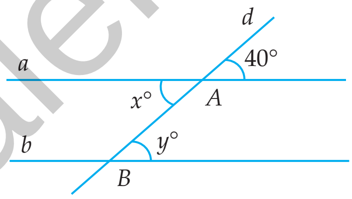
b) Stabiliți dacă OB este sau nu bisectoarea unghiului MON.

3. Se consideră unghiurile adiacente suplementare AOB și BOC. Fie OM bisectoarea unghiului AOB și $ON \perp OM$, $N \in \text{Int}(\sphericalangle BOC)$. Arătați că ON este bisectoarea unghiului BOC.

4. Se consideră un unghi AOB având măsura de $60°$. Fie $OC \perp OA$, $OD \perp OB$ ($A \in \text{Int}(\sphericalangle BOC)$ și $B \in \text{Int}(\sphericalangle AOD)$), OM bisectoarea unghiului AOB și ON bisectoarea unghiului COD.

a) Aflați măsura unghiului COD.

b) Arătați că punctele M, O și N sunt coliniare.



5. În figura alăturată, dreapta d intersectează dreptele paralele a și b în punctele A, respectiv B. Determinați valoarea sumei $x° + y°$.

6. Fie un triunghi ABC și punctele $D \in AB$, $E \in AC$. Stabiliți dacă dreptele DE și BC sunt paralele, știind că:

a) $\sphericalangle DEB = \sphericalangle EBC$;

b) $\sphericalangle BDE = 152°$, $\sphericalangle DBC = 28°$;

c) $\sphericalangle ADE = 95°$, $\sphericalangle ABC = 85°$;

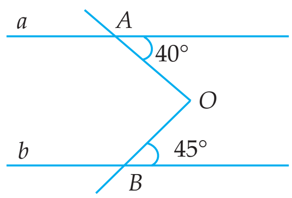
d) $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACB$.

7. Fie dreptele a, b, c, d. Demonstrați că:

a) dacă $a \perp c$ și $b \perp c$, atunci $a \parallel b$;

b) dacă $a \parallel b$ și $c \perp a$, atunci $c \perp b$;

c) dacă $a \perp b$, $c \parallel a$ și $d \parallel b$, atunci $c \perp d$.



8. În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele. Aflați măsura unghiului AOB.

9. Fie M mijlocul segmentului AB și D simetricul unui punct C ($C \notin AB$) față de punctul M. Demonstrați că $AD \parallel BC$.

10. Fie un triunghi ABC și punctul $D \in BC$. Se știe că perimetrul triunghiului ABD este egal cu 27 cm, perimetrul triunghiului ACD este egal cu 43 cm și $AD = 10$ cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

11. Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că:

a) triunghiul este dreptunghic și are un unghi de $42°18'$;

b) triunghiul este isoscel și are un unghi de $53°42'$.

TESTE INIȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului 6 – 12 : 3 – 4 este:
A. –6 B. –2 C. 4 D. 0

(0,5p) **2.** Prețul unui calculator este 2800 lei. După o reducere cu 20%, prețul acestuia devine:
A. 2200 lei B. 2000 lei C. 2240 lei D. 2600 lei

(0,5p) **3.** Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $-9 < a + 1 < -7$, atunci a este egal cu:
A. –10 B. –9 C. –8 D. –7

(0,5p) **4.** Ioana a cumpărat de la magazin o pâine de 2,50 lei și 2 kg de cartofi de 2,40 lei kilogramul. Pentru cumpărăturile făcute, Ioana a plătit:
A. 4,90 lei B. 7,30 lei C. 7,50 lei D. 6,50 lei

(0,5p) **5.** Lungimea laturii unui triunghi echilateral cu perimetrul de 12,6 m este egală cu:
A. 4 m B. 12,6 m C. 6,3 m D. 4,2 m

(0,5p) **6.** Complementul unui unghi de 35° are măsura egală cu:
A. 55° B. 65° C. 90° D. 145°

(0,5p) **7.** Un triunghi isoscel are măsura unghiului opus bazei de 20°. Fiecare dintre unghiurile alăturate bazei sale are măsura de:
A. 20° B. 50° C. 70° D. 80°

(0,5p) **8.** Un triunghi dreptunghic are catetele egale cu 6 cm și 8 cm. Lungimea ipotenuzei triunghiului este egală cu:
A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 14 cm

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Rezolvați ecuația: $12 - 2(3x - 1) = -4$, $x \in \mathbb{Z}$.

(1p) **2.** Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $\frac{3a+2b}{a+7b} = \frac{12}{23}$. Determinați valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

(1p) **3.** Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC și $\sphericalangle A = 30°$. Dacă BD este înălțimea din B a triunghiului ABC ($D \in AC$), determinați măsura unghiului CBD.

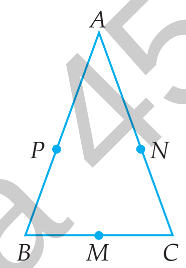
Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Numerele raționale a, b și c sunt direct proporționale cu 2, 3 și 4 și au suma egală cu 6. Determinați cele trei numere.

(1p) **2.** Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x+1| \leq 3\}$. Calculați suma și produsul elementelor mulțimii A.

(1p) **3.** Aflați restul împărțirii prin 10 a numărului $N = 1^{1000} + 5^{2000} + 6^{3000} + 9^{4000}$.

4. Triunghiul ABC din figura alăturată este isoscel, cu $AB = AC$ și $BC = 12$ cm. Punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Se știe că $MN = 5$ cm.



(1p) a) Calculați perimetrul triunghiului ABC.

(1p) b) Demonstrați că dreptele AM și PN sunt perpendiculare.

TESTUL 3

Partea I. *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului 12 : 4 – 3 – 2 este:
A. 2 B. –2 C. 10 D. –1

(0,5p) **2.** Un multiplu al numărului 7 este numărul:
A. 4 B. 20 C. 0 D. 1

(0,5p) **3.** Cel mai mare număr întreg mai mic decât numărul rațional $a = -\frac{3}{4}$ este:
A. –2 B. –1 C. 0 D. 1

(0,5p) **4.** Delia aleargă 10 km într-o oră. Pentru a parcurge 6 km, are nevoie de:
A. 30 minute B. 24 minute C. 40 minute D. 36 minute

(0,5p) **5.** Suplementul unui unghi de 35° are măsura egală cu:
A. 55° B. 65° C. 145° D. 135°

(0,5p) **6.** Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui triunghi echilateral este:
A. 120° B. 90° C. 60° D. 180°

(0,5p) **7.** Latura unui triunghi se exprimă, în centimetri, prin numere întregi. Două dintre laturi au 5 cm, respectiv 1 cm. Lungimea celei de-a treia laturi este:
A. 4 cm B. 1 cm C. 5 cm D. 6 cm

(0,5p) **8.** În triunghiul ABC avem $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$ și $BC = 10$ cm. Lungimea segmentului AB este:
A. 5 cm B. 10 cm C. 20 cm D. 2,5 cm

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2, cu $n \in \mathbb{N}$, se numește **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

Definiție: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x, adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{\ }$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observații:

1. $3 \underset{\text{rădăcină pătrată}}{\overset{\text{pătrat}}{\rightleftarrows}} 9$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind –3 și 3. Prin definiție, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1\,|\,82\,|\,25}$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \\
= &
\end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl așezăm sub 1 (stânga) și efectuăm scăderea.

III.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & 2 \\
=\ 8.2 &
\end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) și despărțim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \cancel{24\cdot 4=96} \\ \cline{2-2}
=\ 8.2 & 23\cdot 3=69 \\
\quad\ \underline{6\,9} & \\
\quad\ 1\,3 &
\end{array}$$

Împărțim pe 8 la 2, obținem câtul 4. Așezăm pe 4 la dreapta lui 2 și înmulțim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operația anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) și facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 135 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \cancel{24\cdot 4=96} \\ \cline{2-2}
=\ 8.2 & 23\cdot 3=69 \\ \cline{2-2}
\quad\ \underline{6\,9} & 265\cdot 5=1325 \\
\quad\ 1\,3\,2.5 & \\
\quad\ \underline{1\,3\,2\,5} & \\
\quad\ =\,=\,=\,= &
\end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă și despărțim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 și înmulțim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferența din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

Probleme rezolvate

1. Calculați: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ și $\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5}$.

Soluție: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obținem:

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{(2 \cdot 3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18$,

$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^3 \cdot 3^2)^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$,

$\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5} = \sqrt{2^4 \cdot 5^6} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^3)^2} = 2^2 \cdot 5^3 = 500$.

2. Determinați numărul natural n, știind că $n = \sqrt{16 \cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluție: Cum $16 \cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10} \cdot (16 + 9) = 3^{10} \cdot 5^2 = (3^5 \cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$.

3. Determinați numărul natural x, știind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluție: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinați cifrele a, b, x, y, pentru care $\sqrt{\overline{4ab}} = \overline{xy}$.

Soluție: Evident, dacă extragem radicalul din $\overline{4ab}$, obținem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ și $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ și $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ și $y = 2$.

Probleme propuse

1. Determinați pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 și 160.

2. Ridicați la pătrat următoarele numere și scrieți de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5, $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $3^{11} \cdot 5^7$, $2^n \cdot 7^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. Scrieți toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 și 500.

4. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 25, 36, 81, 100, 900;
b) 5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6} $(n \in \mathbb{N})$.

5. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $3^2 + 4^2$;
b) $3^2 + 4^2 + 12^2$;
c) $3^7 + 3^6$;
d) $2^{11} - 2^{10}$;
e) $2 \cdot 3^3 \cdot 6^5$;
f) $3^3 \cdot 12^5$.

6. Efectuați următoarele calcule și scrieți rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3 \cdot (3 \cdot 29 + 91 : 7 - 52)$;
b) $1 + 3 + 5 + ... + 49$;
c) $2^{51} + 7 \cdot 2^{50}$;
d) $9^{30} : 3^{11} + 10 \cdot 3^{48} - 3^{50}$.

7. Determinați câte elemente are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect și } x \leq 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătați că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ și $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

9. Arătați că numărul $a = 3^{45} + 2^{62}$ nu este pătrat perfect.

10. Calculați (utilizând descompunerea în factori primi):

a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{2500}$;

b) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^2 \cdot 5^6}$; $\sqrt{6^4 \cdot 3^8}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4}$;

c) $\sqrt{2^{2n}}$; $\sqrt{3^{4m}}$; $\sqrt{2^{2n} \cdot 5^{6m}}$; $\sqrt{7^{4n+2}}$; $\sqrt{2^{6m-4}}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$;

d) $\sqrt{12 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{18 \cdot 2^{13}}$; $\sqrt{6^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{7^{31} + 2 \cdot 7^{30}}$; $\sqrt{3^{22} - 2 \cdot 3^{21} + 3^{20}}$.

11. Calculați (folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate):

a) $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$;

b) $\sqrt{1764}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{7056}$;

c) $\sqrt{10404}$; $\sqrt{50625}$; $\sqrt{64516}$.

12. Calculați:

a) $\sqrt{36} + \sqrt{64} - \sqrt{81}$;

b) $\sqrt{100} - \left(\sqrt{169} - \sqrt{25}\right)$;

c) $\sqrt{9} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;

d) $\left(\sqrt{256} - \sqrt{144}\right) : \sqrt{4}$;

e) $\left(\sqrt{0} + \sqrt{1}\right)^7 + \sqrt{361}$;

f) $\left(2 + \sqrt{324}\right) \cdot \sqrt{16}$;

g) $\left(\sqrt{289} + \sqrt{169}\right) : \sqrt{225}$;

h) $2 \cdot \sqrt{121} - \sqrt{441}$.

13. Calculați:

a) $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$;

b) $\sqrt{20 - 32 : (7-5)}$;

c) $\sqrt{104 : 2 + 4 \cdot 3}$;

d) $\sqrt{(14-6) \cdot (7+11)}$;

e) $\sqrt{2^8 + 2^{11}}$;

f) $\sqrt{15^2 + 20^2}$;

g) $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$;

h) $\sqrt{3\left(7^{12} - 7^{10}\right)}$.

14. Determinați $x \in \mathbb{N}$, știind că:

a) $\sqrt{x} = 15$; b) $\sqrt{x-2} = 16$; c) $7 + \sqrt{x} = 12$; d) $\sqrt{x+3} - 4 = 6$.

15. Calculați $\sqrt{\overline{abc}}$, știind că $\sqrt{\overline{1ba}} = \overline{c3}$.

16. Determinați numărul natural $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{\overline{abc5}} = \overline{3d}$.

17. Aflați lungimea laturii unui ring de box în formă de pătrat cu aria de 36 m².

18. Aflați perimetrul unui pătrat echivalent cu un dreptunghi cu lungimea L = 175 cm și lățimea l = 28 cm (două figuri plane se numesc echivalente dacă au ariile egale).

19. Podeaua unei camere are forma unui dreptunghi cu dimensiunile L = 12 m și l = 8 m. Pentru pavarea ei se folosesc 384 plăci pătrate de gresie cu latura de x cm. Aflați valoarea lui x.

20. Un teren de fotbal are lățimea egală cu $\frac{2}{5}$ din lungime și suprafața de 2 560 m². Determinați perimetrul terenului.

21. Un stilou costă a lei. Dacă prețul său se mărește cu a%, atunci stiloul va costa cu 3,24 lei mai mult. Aflați prețul inițial al stiloului.

I.11. MEDIA ARITMETICĂ PONDERATĂ A *n* NUMERE REALE, $n \geq 2$

DEFINIȚIE: Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Numărul

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

se numește **media aritmetică** a numerelor reale $a_1, a_2, ..., a_n$.

Avem: $\min(a_1, a_2, ..., a_n) \leq m_a \leq \max(a_1, a_2, ..., a_n)$; egalitățile au loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Exemplu: Media aritmetică a numerelor 2, 3 și 7 este $m_a = \frac{2+3+7}{3} = 6$.

DEFINIȚIE: Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Numărul

$$m_{ap} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

se numește **media aritmetică ponderată** a numerelor reale $a_1, a_2, ..., a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$.

Exemplu: Media aritmetică ponderată a numerelor 2, 3 și 7 cu ponderile 3, 5 și 2 este $m_{ap} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2}{3+5+2} = \frac{35}{10} = 3{,}5$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie a și b două numere prime consecutive, mai mari decât 2. Arătați că numărul $\frac{a+b}{2}$ este un număr natural compus.

Soluție: Dacă a și b sunt numere prime mai mari decât 2, înseamnă că a și b sunt impare, deci $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{N}$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a < b$. Cum $\frac{a+b}{2}$ este media aritmetică a numerelor a și b, avem $a < \frac{a+b}{2} < b$, de unde, având în vedere că a și b sunt numere prime consecutive, rezultă că $\frac{a+b}{2}$ este număr compus.

2. Media semestrială la matematică este media aritmetică ponderată dintre media aritmetică a notelor de la oral și nota de la teză, cu ponderile 3 și 1. Calculați media la matematică pe un semestru a unui elev care are, la oral, notele 4, 5, 5, 7, 9 și 10 la teză.

Soluție: Media elevului la oral este $\frac{4+5+5+7+9}{5} = 6$, deci media lui semestrială la matematică este $\frac{6 \cdot 3 + 10 \cdot 1}{3+1} = \frac{28}{4} = 7$.

3. Media de admitere în liceu este media aritmetică ponderată dintre nota la română, nota la matematică (de la examenul de Evaluare Națională) și media anilor de gimnaziu, cu ponderile 40%, 40% și 20%. Calculați media de admitere în liceu a unui elev care la examenul de Evaluare Națională a luat 8,50 la română, 9 la matematică și are 9,20 media anilor de gimnaziu.

Soluție: Media de admitere a elevului este $m_p = \dfrac{8,5 \cdot 40\% + 9 \cdot 40\% + 9,2 \cdot 20\%}{40\% + 40\% + 20\%} =$

$= \dfrac{340 + 360 + 184}{100} = 8,84.$

PROBLEME PROPUSE

1. Media aritmetică a 48 de numere este 60, iar media aritmetică a primelor 40 dintre ele este 36. Aflați media aritmetică a ultimelor 8 numere.

2. Media aritmetică a numerelor a_1 și a_2 este 8, media aritmetică a numerelor a_3, a_4 și a_5 este 72, iar media aritmetică a numerelor a_6, a_7, a_8 și a_9 este 95. Calculați media aritmetică a numerelor a_1, a_2, ..., a_9.

3. Calculați media ponderată a numerelor:

   a) –3 și 5, cu ponderile 4 și 6; b) $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$ și $\dfrac{2}{3}$, cu ponderile 4, 8 și 6.

4. Se amestecă 8 kg de orez de 4 lei kilogramul cu 12 kg de orez de 8 lei kilogramul. Calculați cât costă un kilogram din amestecul obținut astfel.

5. Maria a cumpărat 5 kg de mere la prețul de 6 lei kilogramul și 10 kg de mere la prețul de 4,5 lei kilogramul. Calculați prețul mediu al unui kilogram de mere dintre cele cumpărate de Maria.

6. La sfârșitul semestrului I din clasa a VII-a, Ana are următoarele note la matematică: 7, 8, 10, 10, 10 la oral și 5 la teză. Calculați media ei la matematică pe acest semestru.

7. Calculați media de admitere în liceu a lui Dan, știind că el a luat 8,80 la română, 9,20 la matematică (la examenul de Evaluare Națională) și are media generală a anilor de gimnaziu 9,50 (ponderile notelor sunt 40%, 40%, respectiv 20%).

I.12. MEDIA GEOMETRICĂ A DOUĂ NUMERE REALE POZITIVE

DEFINIȚIE: Dacă a și b sunt numere reale pozitive, atunci media lor geometrică (sau proporțională) este numărul $m_g = \sqrt{ab}$.

Exemplu: Media geometrică a numerelor 12 și 75 este $m_g = \sqrt{12 \cdot 75} = \sqrt{900} = 30$.

1. Media geometrică a două numere reale pozitive a și b este cuprinsă între cele două numere: $\min(a, b) \leq m_g \leq \max(a, b)$.

Egalitățile au loc dacă și numai dacă $a = b$.

CAPITOLUL II
ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale

I. Dacă a și b sunt numere reale, atunci:

1. $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c, \forall c \in \mathbb{R}$;
2. $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c, \forall c \in \mathbb{R}$;
3. $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, \forall c \in \mathbb{R}^*$;
4. $a = b \Leftrightarrow a : c = b : c, \forall c \in \mathbb{R}^*$;

II. Dacă a, b, c, d sunt numere reale, atunci:

1. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a + c = b + d$;
2. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a - c = b - d$;
3. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$;
4. $a = b$ și $c = d \neq 0 \Rightarrow a : c = b : d$.

Probleme rezolvate

1. Considerăm propoziția: „Dacă a, b, c sunt numere reale și $a = b$, atunci $ac = bc$". Stabiliți dacă reciproca acestei propoziții este adevărată.

Soluție: Reciproca este falsă. De exemplu, pentru $a = 1$, $b = 2$ și $c = 0$, avem $ac = bc$, dar $a \neq b$.

2. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a = 2$ și $a^2 + ab + ac = 12$. Determinați $3a - 4b - 4c$ și $a^2 - 2ab - 2ac$.

Soluție: Din relațiile date rezultă $4 + 2b + 2c = 12$ sau $2(b + c) = 8$, deci $b + c = 4$. Avem $3a - 4b - 4c = 3a - 4(b + c) = 6 - 16 = -10$ și $a^2 - 2ab - 2ac = 4 - 4b - 4c = 4 - 4(b + c) = 4 - 16 = -12$.

3. Fie a, b numere reale. Arătați că următoarele cinci egalități sunt echivalente:

a) $7a = 3b + 21$; b) $7a + 9 = 3b + 30$;

c) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1$; d) $4a = 3(b - a + 7)$;

e) $a(b - 7) - b(a - 3) = -21$.

Soluție: Avem: $7a = 3b + 21 \mid +9 \Leftrightarrow 7a + 9 = 3b + 30$, deci a) $\Leftrightarrow$ b); $7a = 3b + 21 \mid : 21 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1$, deci a) $\Leftrightarrow$ c); $7a = 3b + 21 \mid -3a \Leftrightarrow 4a = 3(b - a + 7)$, deci a) $\Leftrightarrow$ d); e) $\Leftrightarrow ab - 7a - ba + 3b = -21 \Leftrightarrow -7a + 3b = -21 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow 7a - 3b = 21 \mid + 3b \Leftrightarrow 7a = 3b + 21$, deci a) $\Leftrightarrow$ e).

4. Se consideră expresia $E = -3(x - y) + x(y + 2) - y(x - 1) - 5(y - 1)$. Arătați că $E = 3$, pentru orice x, y numere reale ce verifică condiția $x + y = 2$.

Soluție: $E = -3x + 3y + xy + 2x - xy + y - 5y + 5 = -x - y + 5 = -(x + y) + 5 = -2 + 5 = 3$.

PROBLEME PROPUSE

1. Dacă $a = 1440$ și $b = 3780$, arătați că:
a) $21a = 8b$; b) $ab = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $a : b = 8 : 21$.

2. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a + 2b = 7$, $4b + 3c = 11$. Calculați $5a + 22b + 9c$.

3. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $3a + b = 7$ și $5b - 4c = 1$, calculați:
$$12a - 11b + 12c.$$

4. Fie a, b numere reale astfel încât $3a + 2 = 5b$. Arătați că:
a) $3a - 1 = 5b - 3$; b) $\frac{a}{5} + \frac{2}{15} = \frac{b}{3}$;
c) $3ab + 2b = 5b^2$; d) $9a^2 + 6a = 15ab$.

5. Dacă x, y sunt numere reale și $x - 2y = 0$, calculați $2x^2 - 3xy - 2y^2$.

6. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ și $2x = 3y$, calculați $6x - 9y - 2$, $\frac{3x}{y} - 5$ și $\frac{x^2 - y^2}{xy}$.

7. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $2x - 5y = 3y - 4x$, calculați $(-3x + 4y - 1)^7$.

8. Fie x, y numere reale, $y \neq 0$, astfel încât $4x + 3y = 0$. Calculați $\frac{2x - y}{x - 3y}$.

9. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ și $2x \neq y$ și $\frac{5x + 2y}{2x - y} = 0{,}75$, calculați $\frac{x}{y}$.

10. Considerăm propoziția: „Dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $ac = bd$.” Studiați dacă reciproca propoziției este adevărată sau falsă.

11. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a + b = 7$, $b + c = 41$ și $c + a = 20$. Calculați $a + b + c$.

12. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $ab = 6$, $bc = 10$ și $ac = 15$. Calculați abc.

13. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $5a + 6b + 7c = 58$ și $7a + 6b + 5c = 62$, arătați că $a + b + c = 10$ și $a - c = 2$.

14. Dacă a, b, c sunt numere reale și $c^2 + ac + bc = 60$, $c = 5$, arătați că $a + b = 7$ și calculați:
$$3c + 5a + 5b,\ c^2 - 2ac - 2bc,\ (a - 5)(b - c)(c - 5).$$

15*. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a + b = 2c$ și $b + c = 2a$, arătați că $a = b = c$.

16*. Dacă a, b, c, d sunt numere reale pozitive și $ac = bd$, iar $a + d = b + c$, atunci $a = b$ și $c = d$.

17. Considerăm propoziția: „Dacă a, b sunt numere reale și $a = b$, atunci $|a| = |b|$."

a) Arătați că reciproca propoziției este falsă.

b) Dacă, în plus, $ab \geq 0$, demonstrați că reciproca este adevărată.

18. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc identitățile:

a) $2x - 3 + 5x + 4 - 6x - 1 = x$;

b) $4(x - 0{,}25) = 4x - 1$;

c) $3(x - 2) + 2(x + 3) = 5x$;

d) $3(2x - 1) - 2(3x - 1) = -1$;

e) $3\left(x-\frac{1}{6}\right)+4\left(x-\frac{1}{8}\right)=7\left(x-\frac{1}{7}\right)$;

f) $5(x - 1) - 3(x + 2) - 2(x - 5) + 1 = 0$;

g) $\frac{x}{26}+\frac{x+1}{39}+\frac{x+2}{52}-\frac{3}{13}=\frac{x-2}{12}$.

19. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $2x + 3y = 1$, arătați că:

$$4(x - y) - 5(2x - 1) + 8(x - 2y) + 23y - 5 = 1.$$

20. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, au loc identitățile:

a) $2^n + 2^n = 2^{n+1}$;

b) $2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n = 2^n$;

c) $2^{n-2} \cdot 4^{n+1} = 8^n$;

d) $6^n + 2^{n-1} \cdot 3^n + 2^{n-1} \cdot 3^{n+2} = 6^{n+1}$.

21. Fie $a = x + 2y - 3z$, $b = 2x - 3y + z$ și $c = -3x + y + 2z$, unde x, y, z sunt trei numere reale. Calculați $a^2 + ab + ac$.

II.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente

- O ecuație de forma $ax + b = 0$, $x \in D$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $D \subseteq \mathbb{R}$, este numită **ecuație de gradul I cu necunoscuta x**.
- Dacă $-\frac{b}{a} \in D$, o astfel de ecuație are soluția unică $x = -\frac{b}{a}$. În caz contrar, ecuația nu are soluție.
- Două ecuații se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.
- Spunem că o ecuație este **reductibilă** la o ecuație de gradul I, dacă este echivalentă cu o ecuație de gradul I.
- **Procedee de a obține ecuații echivalente:**
  – efectuarea unor calcule în oricare membru al ecuației;
  – adunarea (sau scăderea) în ambii membri a aceluiași număr real;
  – înmulțirea (sau împărțirea) ambilor membri cu același număr real nenul.

RECAPITULARE ŞI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Fie a, b numere reale, astfel încât $2a - 3b = -4$. Calculați $9b - 6a$.

(1p) **2.** Dacă x, y sunt numere reale nenule și $3x = 2y$, calculați $\frac{x-4y}{x}$.

(1p) **3.** Rezolvați ecuația $11 - 2x = 17 + 4x$.

(1p) **4.** Ecuațiile $2 - 3x = 5$ și $a(x - 1) - a = 6$ sunt echivalente. Aflați-l pe a.

(1p) **5.** Determinați numărul rațional x, știind că $a = x\sqrt{8} - (x + 1)\sqrt{4} - (x + 2)\sqrt{2}$ este număr rațional.

(1p) **6.** Fie (a, b) o soluție a ecuației $3x - y + 1 = 0$. Arătați că:

$$4(a - b) - 5(2a - 3b) - 3(3b - 1) = 5.$$

(1p) **7.** Un călător parcurge un drum în 3 zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{3}$ din drum, a doua zi $\frac{1}{4}$ din restul drumului, iar a treia zi ultimii 18 km. Care este lungimea drumului?

8. Considerăm mulțimile $A = \{(x, y) \mid 3x - 4y = 10\}$ și $B = \{(x, y) \mid 4x + 3y = 5\}$.

(1p) **a)** Arătați că $(10, 5) \in A$.

(1p) **b)** Determinați $A \cap B$.

TESTUL 2

(1p) **1.** Fie x, y, z numere reale, astfel încât $2x - y = -7$ și $3y + 5z = 5$. Calculați:

$$a = 4x + 7y + 15z.$$

(1p) **2.** Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $2x - 3y - 5 = 0$, calculați $(-4x + 6y + 9)^7$.

(1p) **3.** Ecuația $2(2x - 5) + m = 5x - 1$ are soluția $x = 2$. Determinați m.

(1p) **4.** Un sfert din lungimea unui drum reprezintă 10 km. Aflați lungimea drumului.

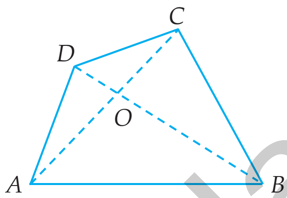
(1p) **5.** Câte soluții (x, y), cu $x, y \in \mathbb{N}$, are ecuația $4x + y = 101$?

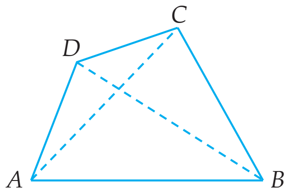
(1p) **6.** Determinați numerele reale x, y, știind că $|x + y - 1| + (2x + y - 4)^2 = 0$.

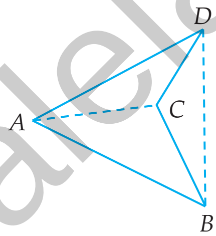
CAPITOLUL IV
PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex

Elemente:
- laturi: segmentele AB, BC, CD, DA;
- diagonale: segmentele AC, BD;
- unghiuri: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$.







Patrulater convex: ambele diagonale se află în interiorul patrulaterului.

Patrulater concav: una dintre diagonale se află în exteriorul patrulaterului.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360°.

Probleme rezolvate

1. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex în care $AB = AD = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle ADB = 60°$ și $\sphericalangle CBD = 90°$ (figura 1).

a) Determinați măsurile unghiurilor A și B.

b) Aflați perimetrul patrulaterului.

c) Desenați patrulaterul $ABCD$.

Soluție: a) Triunghiul ABD este isoscel și are un unghi de 60°, deci este echilateral; rezultă că $BD = 3$ cm, iar $\sphericalangle A = \sphericalangle ABD = 60°$. Astfel, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 150°$.

b) Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BCD, obținem $CD = 5$ cm. Deducem că $\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 15$ cm.

c) Folosind compasul, desenăm triunghiul echilateral ABD cu latura de 3 cm. În exteriorul acestuia, folosind echerul, desenăm triunghiul dreptunghic BCD, $\sphericalangle B = 90°$, cu $BC = 4$ cm. Patrulaterul $ABCD$ este cel căutat.

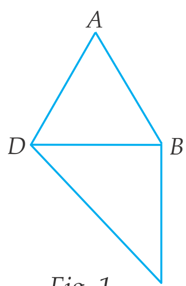


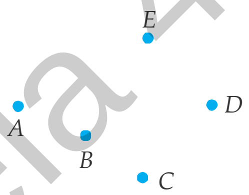
Fig. 1

2. Notăm cu M mulțimea unghiurilor ascuțite ale unui patrulater convex. Câte elemente poate avea mulțimea M?

Soluție: Există patrulatere cu 0 unghiuri ascuțite (cele cu unghiurile 90°, 90°, 90°, 90°), cu 1 unghi ascuțit (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 100°, 100°, 100°), cu 2 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 60°, 120°, 120°) și cu 3 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile 80°, 80°, 80°, 120°). Dacă, prin absurd, un patrulater ar avea toate unghiurile ascuțite, suma lor ar fi mai mică decât $4 \cdot 90° = 360°$, fapt imposibil. În concluzie, mulțimea M poate avea 0, 1, 2 sau 3 elemente.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră punctele A, B, C, D, E, ca în figura alăturată. Desenați și notați două patrulatere convexe și două patrulatere concave, având vârfurile în câte patru dintre cele cinci puncte.



2. a) Desenați un patrulater convex $ABCD$.

b) Numiți perechile de laturi opuse ale patrulaterului.

c) Numiți diagonalele patrulaterului.

d) Numiți perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.

3. Alegem, la întâmplare, două dintre unghiurile unui patrulater. Care este probabilitatea ca unghiurile alese să fie opuse?

4. Laturile unui patrulater, exprimate în metri, sunt patru numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor patrulaterului, știind că perimetrul său este 46 m.

5. Ionuț parcurge traseul $A \to B \to C \to D \to A$ din figura 2. El face 500 de pași. Care este lungimea pasului lui Ionuț?

6. Perimetrul patrulaterului din figura 3 este 100 cm. Perimetrele triunghiurilor ABC și ACD sunt 75 cm, respectiv 8 dm. Aflați lungimea diagonalei AC.

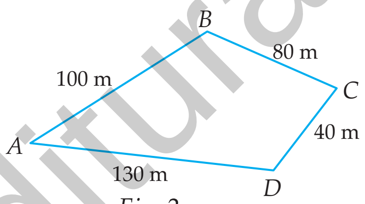


Fig. 2

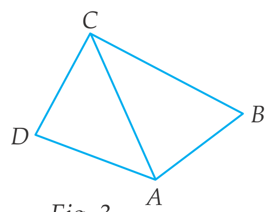


Fig. 3

7. Construiți un patrulater convex $ABCD$, știind că triunghiul ABD este isoscel cu $AB = BD = 5$ cm și $AD = 4$ cm, iar triunghiul BCD este echilateral. Calculați perimetrul patrulaterului.

8. Construiți un patrulater convex $ABCD$ care nu are toate unghiurile drepte și:

a) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90°$.

9. Construiți un patrulater convex $ABCD$, astfel încât:

a) $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 150°$, $\sphericalangle D = ?\,°$; b) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle B = ?°$, $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle D = 20°$.

10. Construiți un patrulater convex $ABCD$, astfel încât triunghiul ACD este echilateral, iar triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.

11. În patrulaterul convex $ABCD$, măsura unghiului A este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri. Determinați măsura unghiului A.

12. În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor A, B, C și D sunt direct proporționale cu numerele 2, 4, 6 și 8. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

13. În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor A, B, C și D sunt invers proporționale cu numerele 2, 3, 4 și 6. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

14. Folosind metoda prin care ați demonstrat că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este $360°$, calculați suma măsurilor unghiurilor unui:

a) pentagon;　　　　b) hexagon.

15. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle DBC = 90°$, $AB = 7{,}2$ cm, $BC = 5$ cm și $CD = 13$ cm. Aflați perimetrul patrulaterului.

16. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul O. Determinați perimetrul patrulaterului, știind că $OA = 5$ cm, $OB = OD = 12$ cm și $OC = 16$ cm.

17. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = AD$ și $BC = CD$. Demonstrați că dreptele AC și BD sunt perpendiculare.

18. Fie $ABCD$ un patrulater și M mijlocul diagonalei AC. Determinați măsurile unghiurilor B și D, știind că $AM = BM = DM$.

19. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt perpendiculare și se intersectează în O, iar punctul O este mijlocul segmentului BD (figura 4).

a) Demonstrați că triunghiurile ABC și ADC sunt congruente.

b) Știind că $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 60°$ și $AB = 6$ cm, determinați lungimea segmentului OC.

20. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = BC$, $\sphericalangle A = 105°$, $\sphericalangle B = 60°$ și $\sphericalangle D = 45°$ (figura 5).

a) Arătați că $AC = CD$.　　　　b) Aflați măsura unghiului DBC.

21. Fie $ABCD$ un patrulater convex, care are unghiurile opuse B și D de măsuri egale. Demonstrați că bisectoarele AP și CQ ale unghiurilor A, respectiv C sunt drepte paralele (figura 6).

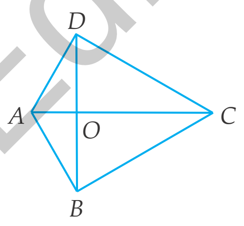


Fig. 4

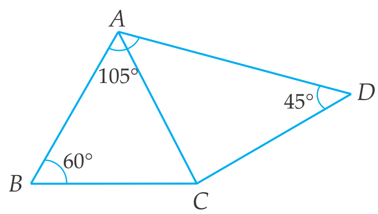


Fig. 5

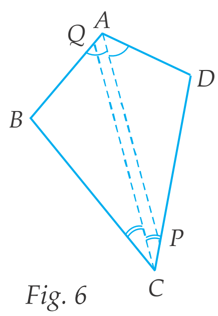


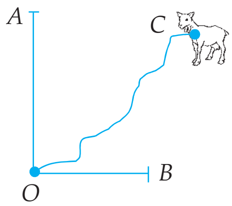
Fig. 6

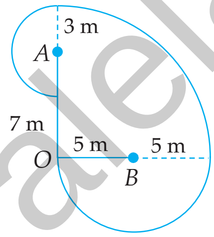
CAPITOLUL V
CERCUL

V.1. PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A VI-A

PROBLEME REZOLVATE

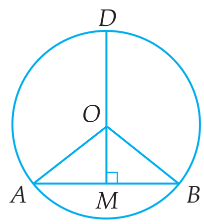
1. O capră C este legată cu o funie lungă de 10 m de un punct O și este situată în interiorului unghiului AOB, ca în figura de mai jos din stânga. OA este un gard de 7 m, iar OB un gard de 5 m, pe care capra nu le poate sări. Desenați suprafața de iarbă pe care o poate paște capra.





Soluție: Capra poate paște iarba din interiorul sfertului de cerc de centru O și rază 10 m, din interiorul semicercului de centru B și rază 5 m și din interiorul semicercului de centru A și rază 3 m, ca în figura de mai sus din dreapta.

2. Fie A, B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Perpendiculara din O pe AB intersectează cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în D (D aparține arcului mare AB). Dacă $\sphericalangle OAB = 40°$, aflați măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{DB}$ și $\overset{\frown}{AB}$.



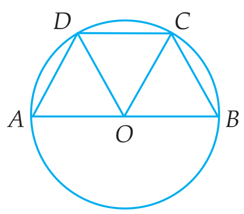
Soluție: Fie $DO \cap AB = \{M\}$. Din triunghiul AOM obținem că $\sphericalangle AOM = 50°$, deci $\overset{\frown}{DOA} = 130°$. Rezultă că măsura arcului $\overset{\frown}{AD}$ este 130° și, analog, măsura arcului $\overset{\frown}{BD}$ este tot 130°. Cum $\sphericalangle AOB = 100°$, măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este 100°.

3. Fie A, B puncte diametral opuse în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, iar C și D două puncte pe unul dintre semicercurile determinate de AB, astfel încât arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{DA}$ au măsurile egale. Arătați că:

a) măsura unghiului DOC este 60°;

b) patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel;

c) patrulaterul $BCDO$ este romb.



Soluție: Cum măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este 180° și arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{DA}$ sunt egale, fiecare arc va avea 60°.

19. Aflați raza cercului înscris în triunghiul ABC, știind că:

a) $AB = BC = CA = 12$ cm; b) $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $\sphericalangle A = 90°$;

c) $AB = AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm; d) $AB = 7$ cm, $AC = 24$ cm, $BC = 25$ cm.

20. a) Fie $ABCD$ un paralelogram cu proprietatea că există un cerc tangent la fiecare dintre laturile sale. Demonstrați că $ABCD$ este un romb.

b) Un romb $ABCD$ are diagonalele $AC = 12$ cm și $BD = 16$ cm. Aflați raza cercului înscris în acest romb.

21. Cercul de centru O este tangent la fiecare dintre laturile trapezului isoscel $ABCD$ (figura 11). Se știe că bazele trapezului au lungimile $AB = 16$ cm, $CD = 4$ cm.

a) Aflați lungimea laturii AD.

b) Arătați că raza cercului este $r = 4$ cm.

c) Calculați perimetrul și aria trapezului.

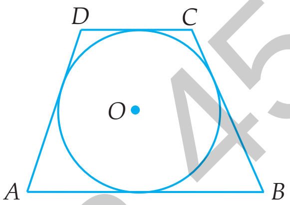


Fig. 11

V.5. Poligoane regulate înscrise într-un cerc. Definiţie, desen

Definiție. Un poligon convex cu toate laturile și toate unghiurile egale se numește **poligon regulat**.

Teoremă. Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.

Teoremă. Orice poligon regulat se poate circumscrie unui cerc.

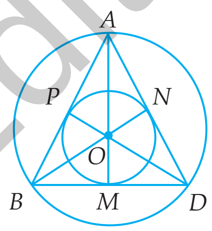
Observație: Centrul cercului înscris într-un poligon regulat coincide cu centrul cercului său circumscris. Acest punct se numește **centrul** poligonului.

Cazuri particulare importante:

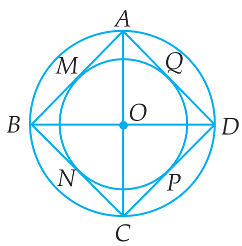
1) Triunghiul echilateral – centrul său este, simultan, centrul cercului circumscris triunghiului, centrul cercului înscris în triunghi, centrul de greutate și ortocentru triunghiului.

2) Pătratul – centrul său este punctul de intersecție a diagonalelor.

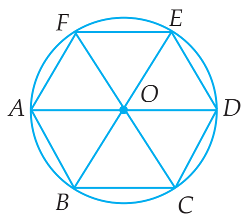
3) Hexagonul regulat – centrul său este punctul de intersecție a diagonalelor. Diagonalele AD, BE și CF împart hexagonul regulat $ABCDEF$ în șase triunghiuri echilaterale. Un unghi al hexagonului regulat are măsura 120°.



Triunghiul echilateral



Pătratul



Hexagonul regulat

Probleme rezolvate

1. a) Un patrulater cu toate laturile egale este poligon regulat?
b) Un patrulater cu toate unghiurile egale este poligon regulat?

Soluție: a) Nu. De exemplu, un romb cu un unghi de 30° nu este poligon regulat.

b) Nu. De exemplu, un dreptunghi cu lungimea diferită de lățime nu este regulat.

2. a) Construiți un hexagon neregulat cu toate unghiurile egale.
b) Construiți un hexagon neregulat cu toate laturile egale.

Soluție: a) Considerăm un hexagon regulat $ABCDEF$ și ducem $MN \parallel CF$, $M \in AF$, $N \in BC$. Poligonul $MNCDEF$ verifică cerințele problemei.

b) Considerăm două trapeze isoscele $MQRS$ și $MQPN$, în care laturile neparalele și bazele mici sunt egale ($MS = SR = RQ = QP = PN = NM$) și, în plus, $\sphericalangle SMQ \neq 60°$. Poligonul $MNPQRS$ verifică cerințele problemei.

Probleme propuse

1. Fie A și B două puncte din plan. Desenați cercurile de rază $r = AB$, cu centrele în A și B. Notați cu C unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri și demonstrați că ABC este poligon regulat.

2. Fie ABC un triunghi echilateral de centru O.
a) Demonstrați că $\Delta OAB \equiv \Delta OBC \equiv \Delta OCA$.
b) Aflați măsurile unghiurilor AOB, ABO, BOM, AMC și AOC, unde M este punctul de tangență dintre cercul înscris în triunghi și latura BC.

3. Desenați un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și trasați două diametre perpendiculare ale acestuia, AC și BD. Demonstrați că $ABCD$ este poligon regulat.

4. Care dintre următoarele propoziții este adevărată?
P_1: Orice romb este un poligon regulat.
P_2: Orice dreptunghi este un poligon regulat.
P_3: Orice pătrat este un poligon regulat.

5. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O, iar M punctul de tangență dintre cercul înscris în pătrat și latura AB. Determinați măsurile unghiurilor AOB, OAB, OMA, MOA și MOC.

6. Fie AB un diametru al unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și $OQ \perp AB$, $Q \in \mathcal{C}(O, r)$. Dacă C și D sunt simetricele punctelor A, respectiv B față de punctul Q, demonstrați că $ABCD$ este poligon regulat (figura 1).

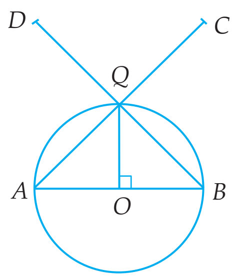


Fig. 1

7. a) Dacă un hexagon are toate unghiurile egale, este acesta poligon regulat?
b) Dacă un hexagon are toate laturile egale, este acesta poligon regulat?

8. Desenați un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și marcați un punct $A \in \mathcal{C}(O, r)$.

a) Construiți cercul $\mathcal{C}(A, r)$, cu centrul A și raza r. Notați cu B unul dintre punctele de intersecție dintre $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(A, r)$. Arătați că măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este $60°$.

b) Utilizând procedeul descris la punctul a), împărțiți cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în 6 arce congruente prin punctele A, B, C, D, E, F.

c) Arătați că ACE, BDF și $ABCDEF$ sunt poligoane regulate.

9. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de centru O, iar M punctul de tangență dintre cercul înscris în hexagon și latura AB. Determinați măsurile unghiurilor AOM, AOC, MOC, OAC, CAF și ACE.

10. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de centru O. Arătați că:

a) $ABCD$ este un trapez isoscel;

b) $ABCO$ este un romb;

c) ABD este un triunghi dreptunghic;

d) ACE este un triunghi echilateral.

11. Fie ABC un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Fiecare latură a triunghiului se împarte în trei părți egale prin punctele $M, N \in BC$, $P, Q \in CA$, $R, S \in AB$. Arătați că $MNPQRS$ este hexagon regulat (figura 2).

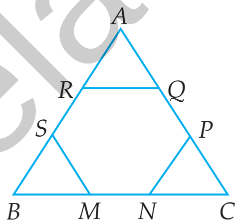


Fig. 2

12. a) Care este măsura unui unghi al unui pentagon regulat?

b) Care este măsura unui unghi al unui octogon regulat?

13. Arătați că mijloacele laturilor unui poligon regulat cu 3 sau 4 laturi sunt, de asemenea, vârfurile unui poligon regulat. Este adevărat rezultatul pentru un poligon regulat cu n laturi ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$)?

14. Mozaicul din figura 3 este format dintr-un hexagon regulat în centru și din alte șase hexagoane regulate construite pe laturile acestuia, în exterior. Arătați că $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$ și că ABC este triunghi echilateral.

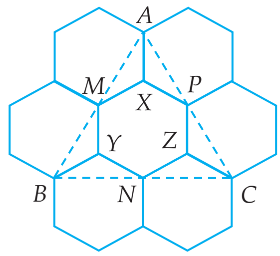


Fig. 3

V.6. LUNGIMEA CERCULUI ŞI ARIA DISCULUI

Lungimea unui cerc cu raza r este egală cu $2\pi r$.

Lungimea unui arc de cerc cu raza r, care corespunde unui arc cu măsura de $n°$, este egală cu $\dfrac{2\pi r}{360} \cdot n$.

Aria unui disc cu raza r este egală cu πr^2.

Aria unui sector de cerc, de rază r, care corespunde unui arc cu măsura de $n°$, este egală cu $\dfrac{\pi r^2}{360} \cdot n$.

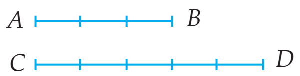
CAPITOLUL VI
ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

VI.1. Segmente proporţionale. Teorema paralelelor echidistante

1. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor (exprimate prin aceeași unitate de măsură).

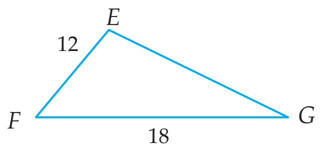
Exemple:

a)



Dacă $AB = 3$ cm și $CD = 5$ cm, atunci raportul segmentelor AB și CD este $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$.

b)



Dacă $EF = 12$ mm și $FG = 18$ mm, atunci raportul segmentelor EF și FG este $\frac{EF}{FG} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

2. Șirurile de segmente (A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...) și (C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, ...) se numesc (direct) proporționale dacă șirurile lungimilor lor sunt (direct) proporționale, adică:

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = ... = k.$$

Valoarea comună, k, a acestor rapoarte se numește **factor de proporționalitate**.

Exemplu: Dacă $A_1B_1 = 2$ m, $A_2B_2 = 5$ m, $A_3B_3 = 7$ m, $C_1D_1 = 6$ m, $C_2D_2 = 15$ m, $C_3D_3 = 21$ m, atunci:

$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \frac{1}{3}$, deci A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 și C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 sunt (direct) **proporționale**, iar $k = \frac{1}{3}$ este factorul lor de proporționalitate.

3. Împărțirea unui segment într-un raport dat

Propoziția 1. Există un singur punct interior unui segment care împarte segmentul considerat într-un raport dat.

Exemplu:

$M \in AB$, $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$

Propoziția 2. Există un singur punct exterior unui segment (dar situat pe dreapta suport a segmentului) care împarte segmentul considerat într-un raport dat, diferit de 1.

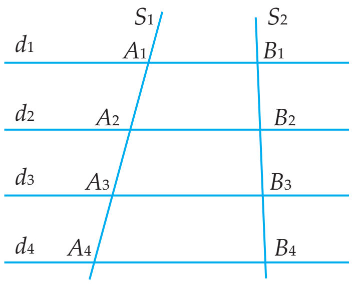
Exemplu: 

$N \in AB, N \notin AB, \frac{NA}{NB} = \frac{2}{5}$

Observație: Pe dreapta AB există exact două puncte, $M \in AB$ și $N \notin AB$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$, unde $k > 0$, $k \neq 1$. Cele două puncte, M și N, se numesc **puncte conjugate armonic** în raport cu A și B.

4. Teorema paralelelor echidistante

Dacă dreptele paralele $d_1, d_2, ..., d_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) determină pe o secantă segmente de lungimi egale, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente de lungimi egale.



Dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ și $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, atunci $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

5. Împărțirea unui segment în n părți egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)

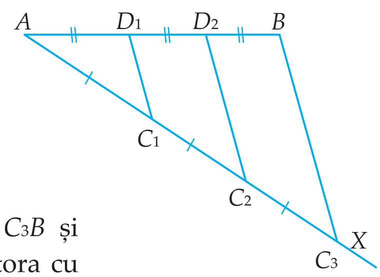
Să împărțim un segment AB în trei părți egale.

Pentru aceasta, procedăm astfel:

I. Trasăm o semidreaptă AX (cu direcția diferită de AB) și alegem un punct oarecare $C_1 \in AX$.

II. Construim cu ajutorul unui compas punctele C_2, $C_3 \in AX$, astfel încât $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$.

III. Prin punctele C_1 și C_2 ducem paralele la C_3B și notăm cu D_1, respectiv D_2 intersecțiile acestora cu segmentul AB. Conform teoremei paralelelor echidistante, avem $AD_1 = D_1D_2 = D_2B$.



Procedăm analog pentru a împărți un segment AB în n părți egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

Probleme rezolvate

1. Fie un segment AB cu lungimea de 14 cm și un punct $C \in AB$, astfel încât $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{5}$. Aflați lungimile segmentelor CA și CB (figura 1).

Fig. 1

Soluție: **Metoda I**. Din relația $\frac{CA}{CB}=\frac{2}{5}$ deducem că există $k > 0$, astfel încât $CA = 2k$, $CB = 5k$. Cum $CA + CB = AB = 14$, rezultă că $7k = 14$, deci $k = 2$ și $CA = 4$ cm, $CB = 10$ cm.

Metoda a II-a: Egalitatea $\frac{CA}{CB}=\frac{2}{5}$ este echivalentă cu $\frac{CA}{CA+CB}=\frac{2}{2+5}$ sau $\frac{CA}{14}=\frac{2}{7}$, de unde obținem $CA = 4$ cm și apoi $CB = 10$ cm.

2. Fie A, C, B, D patru puncte coliniare (în această ordine), astfel încât $AB = 12$ cm și $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=3$. Notăm cu M mijlocul segmentului AB.

a) Aflați lungimile segmentelor CA, CB și DB.

b) Arătați că $MB^2 = MC \cdot MD$ (lungimea lui MB este media geometrică a lungimilor segmentelor MC și MD) (figura 2).

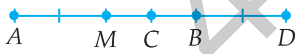


Fig. 2

Soluție: a) Din relațiile $CA = 3CB$ și $CA + CB = 12$ rezultă că $4CB = 12$, deci $CB = 3$ cm și $CA = 9$ cm. Cum $DA = 3DB$ și $DA - DB = 12$, avem $2DB = 12$, deci $DB = 6$ cm și $DA =$ $= 18$ cm.

b) Deoarece $MA = MB = 6$ cm, rezultă că $MC = AC - MA = 3$ cm și $MD = MB + BD =$ $= 12$ cm, deci $MB^2 = 36 = MC \cdot MD$.

3. Se consideră patru puncte coliniare A, C, B, D (în această ordine), astfel încât $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$, $k > 0$. Notăm cu a lungimea segmentului AB.

a) Arătați că $1 < k$.

b) Calculați, în funcție de a și k, lungimile segmentelor CA, CB, DA și DB.

c) Demonstrați că $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$ (lungimea lui AB este media armonică a lungimilor segmentelor AC și AD) (figura 3).

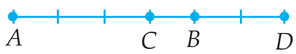


Fig. 3

Soluție: a) Deoarece $DA > DB$, rezultă că $1 < \frac{DA}{DB} = k$.

b) Egalitatea $\frac{CA}{CB}=\frac{k}{1}$ este echivalentă cu $\frac{CA}{CA+CB}=\frac{k}{k+1}$ sau $\frac{CA}{a}=\frac{k}{k+1}$, deci $CA =$ $=\frac{ak}{k+1}$, iar $CB = AB - AC = \frac{a}{k+1}$. Analog, din relația $\frac{DA}{DB}=\frac{k}{1}$ obținem $\frac{DA}{DA-DB}=\frac{k}{k-1}$ sau $\frac{DA}{a}=\frac{k}{k-1}$, deci $DA = \frac{ak}{k-1}$ și $DB = DA - AB = \frac{a}{k-1}$.

c) Avem $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{k+1}{ak}+\frac{k-1}{ak}=\frac{2}{a}=\frac{2}{AB}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare (în această ordine), astfel încât $AB = BC = CD$. Determinați valoarea fiecăruia dintre rapoartele $\frac{AB}{AD}$, $\frac{BD}{AD}$ și $\frac{AB}{BD}$.

2. Fie M, N, P, Q, R cinci puncte coliniare (în această ordine), astfel încât $MN = NP = PQ = QR$. Aflați valoarea fiecăruia dintre rapoartele $\frac{MN}{MR}$, $\frac{PR}{MR}$, $\frac{MR}{NR}$ și $\frac{MQ}{NR}$.

3. Fie AB un segment cu lungimea de 11 cm și punctele $M, N \in AB$, astfel încât $AM = 4$ cm și $MN = 5$ cm. Determinați valoarea fiecăruia dintre rapoartele: $\frac{AM}{AN}$, $\frac{MN}{AB}$, $\frac{MB}{NB}$, $\frac{NB}{AM}$ (figura 4).

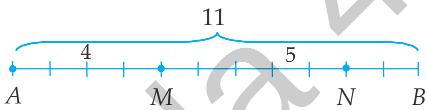


Fig. 4

4. Se consideră un segment AB.

a) Dacă $C \in AB$, astfel încât $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$ și $BC = 4$ m, aflați lungimile segmentelor AC și AB.

b) Dacă $M \in AB$, $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$ și $AB = 32$ cm, determinați lungimile segmentelor AM și BM.

5. Fie AB un segment cu lungimea de 8 cm și un punct P situat pe dreapta AB, în exteriorul segmentului AB, astfel încât $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{7}$. Aflați lungimile segmentelor PA și PB.

6. Segmentul AB, cu lungimea de 45 cm, este împărțit de punctele M și N în trei părți, AM, MN și NB, direct proporționale cu 3, 5, respectiv 7. Aflați lungimile segmentelor AM, MN și NB.

7. Fie P un punct pe dreapta AB. Determinați valorile rapoartelor $\frac{PA}{AB}$ și $\frac{PB}{AB}$, știind că:

a) $P \in AB$ și $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{11}$; b) $P \notin AB$ și $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$; c) $P \notin AB$ și $\frac{PA}{PB} = \frac{7}{5}$.

8. Se consideră un segment AB și punctele $M, N \in AB$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NA}$. Demonstrați că $MA = NB$.

9. Pe dreapta AB se consideră punctele M și N, astfel încât $M \in AB$ și $\frac{MA}{MB} = k$, ($k > 0$), $N \notin AB$, $\frac{NA}{NB} = p$ ($0 < p < 1$). Determinați (în funcție de k sau p) valorile rapoartelor $\frac{MA}{AB}, \frac{MB}{AB}, \frac{NA}{AB}, \frac{AB}{NB}$.

10. Fie d_1, d_2, d_3, d_4 patru drepte paralele. Secantele a și b intersectează aceste drepte în punctele A_1, A_2, A_3, A_4, respectiv B_1, B_2, B_3, B_4 (figura 5). Dacă $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ și $B_1B_2 = 6$ cm, aflați lungimile segmentelor B_1B_3, B_2B_4 și B_1B_4.

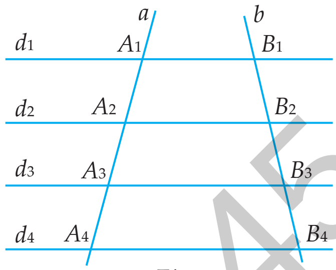


Fig. 5

11. Tudor a cumpărat de la brutărie o franzelă lungă de 55 cm. El a împărțit pâinea cu fratele său, astfel încât raportul lungimilor celor două bucăți a fost $\frac{2}{3}$. Calculați lungimile bucăților de franzelă astfel obținute.

12. Un drum în linie dreaptă de la București la Pitești are 120 km. Un șofer care pleacă din București spre Pitești se oprește la un popas, după ce a parcurs $\frac{3}{5}$ din drum. La ce distanță de Pitești se află popasul?

13. Două localități, A și B, sunt legate de un drum în linie dreaptă. La ora 8 dimineața, o mașină pornește din A spre B, mergând cu viteza constantă de 90 km/h și o altă mașină pleacă din B spre A, mergând cu viteza constantă de 60 km/h. Ele se întâlnesc după 3 ore în punctul C. Determinați valoarea raportului $\frac{AC}{CB}$, distanța AB și ora la care a ajuns fiecare mașină la destinație.

14. Un drum în linie dreaptă are borne kilometrice din doi în doi kilometri. Localitatea A este în dreptul bornei care indică 72 km, localitatea B este în dreptul bornei care indică 224 km, iar la kilometrul 110 se află o fântână M. Determinați valorile rapoartelor $\frac{AM}{MB}, \frac{AM}{AB}$ și $\frac{BM}{AB}$. Aflați cât la sută din distanța AB a parcurs un călător care a mers din localitatea A până la fântâna M.

CAPITOLUL VII
RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

VII.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă

- Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei din acel punct pe dreaptă.
- Proiecția ortogonală a unei mulțimi F pe o dreaptă este mulțimea F' a tuturor proiecțiilor punctelor mulțimii F pe acea dreaptă.
- Proiecția unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

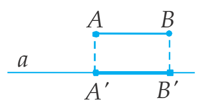
Problemă rezolvată

Fiind dată o dreaptă a și un segment AB, determinați proiecția segmentului AB pe dreapta a.

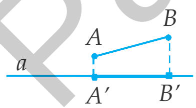
Soluție: Fie A' și B' proiecțiile punctelor A, respectiv B, pe dreapta a. Analizăm situațiile:

I. Segmentul AB nu are puncte comune cu dreapta a.

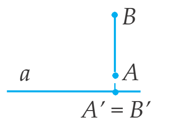
a) $AB \parallel a$;



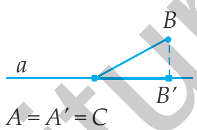
b) $AB \nparallel a$, $AB \not\perp a$;

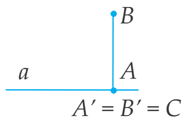


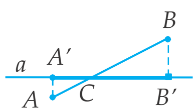
c) $AB \nparallel a$, $AB \perp a$.



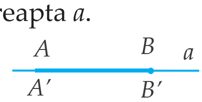
II. Segmentul AB are un singur punct, C, comun cu dreapta a.

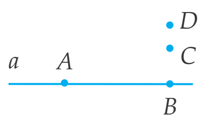






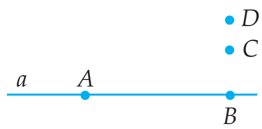
III. Segmentul AB este inclus în dreapta a.





Probleme propuse

1. În figura alăturată, punctele A și B sunt pe dreapta a, iar B, C, D sunt coliniare și $BC \perp a$. Găsiți proiecția mulțimii $F = \{A, B, C, D\}$ pe dreapta a.



2. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Proiecțiile laturilor neparalele ale trapezului pe dreapta AB au lungimile egale cu 2 cm și, respectiv, 4 cm. Dacă $CD = 6$ cm, determinați lungimea bazei AB.

3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O. Determinați:
a) proiecțiile punctului A pe dreptele BD, BC, respectiv AC;
b) proiecțiile segmentului AB pe dreptele AD, respectiv AC;
c) proiecția segmentului AC pe dreapta AB.

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, iar D proiecția punctului A pe BC. Determinați proiecția:
a) catetei AC pe ipotenuză; b) ipotenuzei BC pe AB; c) înălțimii AD pe BC;
d) catetei AB pe AC; e) catetei AB pe AD.

5. Segmentul AB, având lungimea de 6 cm, formează cu o dreaptă a un unghi de 60°. Aflați lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta a.

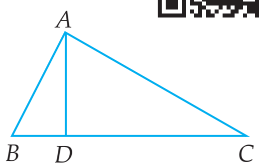
6. Într-un sistem de coordonate xOy considerăm punctul $A(2, -3)$. Care sunt coordonatele punctelor M și N, proiecțiile punctului A pe Ox, respectiv Oy?

7. În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1, 3)$ și $B(-2, 1)$. Care sunt lungimile proiecțiilor segmentului AB pe Oy, respectiv Ox?

VII.2. Teorema înălțimii

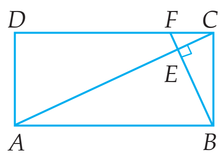
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$.



Probleme rezolvate

1. O grădină are formă de dreptunghi. Construim o alee BF, $F \in DC$, astfel încât $BF \perp AC$. Dacă $\{E\} = AC \cap BF$, $AE = 240$ m și $CE = 60$ m, aflați:
a) aria terenului; b) lungimea aleii BF.



Soluție: a) Din teorema înălțimii în triunghiul ABC rezultă că $BE^2 = AE \cdot EC$ și de aici obținem $BE = 120$ m. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = 36000$ m^2 = 3,6 ha.

b) Folosind teorema înălțimii în triunghiul BCF, avem $CE^2 = BE \cdot EF$. Rezultă că $EF = 30$ m. Deci, $BF = 150$ m.

2. (Reciproca teoremei înălțimii) Dacă într-un triunghi ABC înălțimea AD (cu D între B și C) este medie proporțională între proiecțiile laturilor AB și AC pe BC, atunci triunghiul este dreptunghic în A.

PROBLEME RECAPITULATIVE

ALGEBRĂ

1. Determinați $\sqrt{x}$, știind că:

a) $x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$;

b) $x = \frac{5}{9} \cdot \left\{1 - \frac{1}{4} \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} : \frac{5}{4}\right)\right]\right\}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$;

b) $2\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 10\sqrt{3}$.

3. Fie trei puncte A, B, C, astfel încât $AB = \sqrt{605}$ cm, $BC = \sqrt{180}$ cm și $CA = \sqrt{125}$ cm. Arătați că punctele A, B și C sunt coliniare.

4. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{50} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{18}\right) : \sqrt{8}$ este natural.

5. Arătați că $a = \left(\sqrt{2} + \sqrt{72}\right) : \left(\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{32}\right)$ este număr rațional.

6. Calculați:

a) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \cdot \sqrt{6}$;

b) $\left(\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) : \left(\sqrt{2}\right)^{-1}$.

7. Calculați:

a) $3 \cdot (3{,}5 - 0{,}25 \cdot 10) - \left(\sqrt{5} - \frac{2{,}5}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5}$;

b) $(-1)^9 + 2\frac{1}{2} : \sqrt{0{,}25} - \frac{20}{\sqrt{300}} + \frac{\sqrt{48}}{6}$.

8. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{3} + \frac{15}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} - \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5} + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) : \frac{1}{\sqrt{72}}$ este cubul unui număr natural.

9. Fie numerele reale $a = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{6} + \left|12 - 7\sqrt{3}\right|$ și $b = \sqrt{6^2 + 8^2} - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $a = 4\left(\sqrt{2} - 3\right)$.

b) Calculați $(a + b)^{10}$.

10. Fie $a = \left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{27} - \sqrt{3}\right)$ și $b = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{12} + 2\sqrt{75}\right) : \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - \sqrt{18}\right)$. Arătați că numărul $\left(a\sqrt{2}\right) : b$ este număr natural.

11. Ordonați crescător numerele reale:

a) $a = 7$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{13}$ și $d = 5\sqrt{2}$;

b) $t = -3\sqrt{2}$, $x = -4$, $y = -2\sqrt{5}$ și $z = -5$.

GEOMETRIE

1. Un patrulater $ABCD$ are măsurile unghiurilor A, B, C, D direct proporționale cu 10, 5, 6, respectiv 3. Determinați măsura unghiului A.

2. Calculați perimetrul patrulaterului $ABCD$, știind că $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, $AB = 6$ cm și $BC = 8$ cm.

3. Paralelogramul $ABCD$ are $AD = BD$ și $\sphericalangle ADB = 90°$. Aflați măsura unghiului ABC.

4. Calculați aria patrulaterului $MNPQ$, știind că $MP = 12$ dm, $NQ = 8$ dm și $MP \perp NQ$.

5. Calculați perimetrul unui romb ale cărui diagonale au lungimile de 8 cm și 6 cm.

6. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD$, cu $AC = 4$ cm și $BD = 6$ cm. Calculați aria lui $ABCD$, știind că triunghiurile AOB și BOC au perimetrele egale.

7. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu diagonalele $AC < BD$ și $AC \perp BD$. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA. Stabiliți natura patrulaterului $MNPQ$.

8. a) Calculați aria unui pătrat cu diagonala de $2\sqrt{2}$ cm.

   b) Calculați aria unui triunghi echilateral cu latura de 12 dam.

9. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ cu centrul în O și raza $r = 10$ cm. Aflați lungimea coardei AB a cercului $\mathcal{C}(O, r)$, care subîntinde un arc de 120°.

10. Fie A, B, C trei puncte pe cercul $\mathcal{C}$, astfel încât $\sphericalangle BAC = 36°$. Determinați măsurile celor două arce ale cercului $\mathcal{C}$ care au extremitățile B și C.

11. Fie un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ cu centrul în O și raza $r = 5$ m. Punctul P se află la distanța de 13 m de punctul O. Calculați lungimea uneia dintre tangentele duse din P la cercul $\mathcal{C}$.

12. Două cercuri $\mathcal{C}(O)$ și $\mathcal{C}(Q)$, cu centrele în O, respectiv Q, se intersectează în punctele A și B. Calculați aria triunghiului OAQ, știind că $OQ = 12$ cm și $AB = 8$ cm.

13. Calculați aria unui triunghi ABC cu $AB = AC = 5$ cm și $BC = 6$ cm.

14. a) Calculați aria trapezului dreptunghic $ABCD$, știind că $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm și $CD = 1$ cm.

    b) Calculați aria trapezului isoscel $ABCD$, știind că $AB \parallel CD$, $AB = 7$ cm, $CD = 1$ cm, $AD = BC = 5$ cm.

15. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in AB$, $N \in AC$, astfel încât $MN \parallel BC$. Dacă $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm și $AC = 12$ cm, determinați lungimile segmentelor MN și AN.

16. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 6$ cm și $AD = 9$ cm. Fie $M \in AB$, $N \in BC$, astfel încât $AM = MB$ și $BN = 1$ cm. Aflați valoarea raportului $\dfrac{DM}{MN}$.

17. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu diagonala $BD = 18$ cm. Dacă M este mijlocul laturii BC și $\{P\} = AM \cap BD$, aflați lungimea segmentului BP.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

PROBLEME RECAPITULATIVE. CLASA A VI-A

ARITMETICĂ

1. $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1, 4, 9\}$; $A \cup B = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B = \{4, 9\}$; $A \setminus B = \{5, 6, 7, 8\}$; $B \setminus A = \{0, 1\}$. **2.** $X = \{1, 5, 7, 9, 10\}$ și $Y = \{3, 4, 5, 7, 9\}$. **3.** card$(A \cup B)$ = card A + card B – card$(A \cap B) = 41$. **4.** a) $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 9\}$; b) A are 6 submulțimi cu cinci elemente; c) $2^6 = 64$. **5.** $a = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 3 \cdot 5^2$, $c = 7 \cdot 13$, $d = 2 \cdot 3 \cdot 23$. Numărul a are cei mai mulți divizori naturali. **6.** $n = 12$. **7.** $(a; b) = 12$, $[a; b] = 2520$. **8.** Cel mai mare divizor comun al celor două numere este $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Deci, numerele 126 și 420 au opt divizori comuni. **9.** Din relațiile $248 = na + 14$ și $107 = nb + 17$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $n > 17$) obținem $234 = na$ și $90 = nb$, deci n este divizor comun al numerelor 234 și 90. Cum $n > 17$, rezultă că $n = 18$. **10.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 24 și 36 este 72. Numerele cerute sunt: $72 \cdot 0$, $72 \cdot 1$, $72 \cdot 2$, $72 \cdot 3$ și $72 \cdot 4$. **11.** Numărul căutat, n, este cel mai mic multiplu comun al numerelor 8, 12 și 18, deci $n = 72$. **12.** Notăm numărul de mere cu m. Din relațiile $m = 3a + 1 = 4b + 1$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$) rezultă că $m - 1$ este multiplu de 12, ceea ce, având în vedere că $4m < 100$, ne conduce la concluzia că $m = 13$. **13.** a) 21 de băieți; b) 30 de elevi. **14.** 2400 lei. **15.** a) $\frac{2}{11}$; b) $\frac{3}{4}$. **16.** Fie A, B și C măsurile unghiurilor triunghiului considerat. Avem $\frac{A}{1} = \frac{B}{5} = \frac{C}{6} = \frac{A+B+C}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$, deci $C = 6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$. **17.** a) Din relația $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ ($k \in \mathbb{Q}$, $n > 0$) obținem $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$, deci $n = 3k \cdot \frac{3}{k} = 9 \in \mathbb{N}$; b) Având în vedere cele stabilite la punctul a), observăm că $\frac{a+c}{2} = \frac{2k+4k}{2} = 3k = b$. **18.** Avem $3a = 4b = 6c = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), de unde rezultă că $a = \frac{k}{3}$, $b = \frac{k}{4}$, $c = \frac{k}{6}$ și k este multiplu de 12. Înlocuind în inegalitatea din enunț, obținem $\frac{2k}{3} + \frac{3k}{4} - \frac{4k}{6} < 15$, deci $k < 20$, de unde $k = 12$ (deoarece $k \vdots 12$). Deci, $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$. **19.** Din relațiile $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ și $b \cdot \frac{1}{6} = c \cdot \frac{1}{2}$ rezultă că $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{1}$. a) Avem $c = \frac{1}{2}a = 50\%a$; b) Înlocuind în egalitatea din ipoteză, obținem $6c^2 + 3c^2 + 2c^2 = 176$, deci $c = 4$ și $a = 8$, $b = 12$. **20.** a) Din egalitatea $\frac{\overline{ab}}{5} = \frac{\overline{bc}}{4}$, rezultă că $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$, de unde obținem $5 \mid \overline{ab}$, deci $b = 5$ (căci $b \neq 0$); b) Relația $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$ este echivalentă cu $8a = 46 + c$, de unde rezultă că $a = 6$, $c = 2$. Avem $\overline{ab} = 65$, $\overline{bc} = 52$. **21.** a) 25; 9; b) 7,00. **22.** a) $210 - 165 = 45$; b) $p = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$. **23.** Deoarece $A = \{102, 111, 120,$

TESTE INIȚIALE

Testul 1. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** B. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** D. **8.** C. **II. 1.** $x = 3$. **2.** $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. **3.** $\sphericalangle CBD = 15°$. **4.** a) Deoarece triunghiul ABC este echilateral și D este mijlocul lui BC, rezultă că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = 30°$. Triunghiul AOE este isoscel cu baza AE, căci $OA = OE$ (fiind raze ale cercului considerat), deci $\sphericalangle AOE = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. Așadar, arcul mic AE are măsura de $120°$. Cum dreapta BC este perpendiculară în D pe raza OD, rezultă că cercul este tangent dreptei BC; b) Analog, obținem că $\sphericalangle AOF = 120°$. Din congruența triunghiurilor AOE și AOF ($AO = AO$, $OE = OF$, $\sphericalangle AOE = \sphericalangle AOF = 120°$) deducem că $AE = AF$. Deoarece $AE = AF$ și AD este bisectoarea unghiului EAF, rezultă că $AD \perp EF$ și, cum avem și $AD \perp BC$, înseamnă că $BC \parallel EF$.

Testul 2. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** C. **4.** A. **5.** C. **6.** B. **7.** C. **8.** B. **II. 1.** $a = \frac{4}{3}$; $b = 2$; $c = \frac{8}{3}$. **2.** $A = \{-2, -1, 0, 1\}$; $S = -2$; $P = 0$. **3.** Ultima cifră a lui N este 3, deci restul cerut este 3. **4.** a) În triunghiul isoscel ABC, mediana bazei AM este atât înălțime, cât și bisectoare. Triunghiul AMC este dreptunghic și MN este mediana ipotenuzei, deci $AC = 2MN = 10$ cm; cu teorema lui Pitagora, $AM = 8$ cm. Atunci $\mathscr{P}_{ABC} = 2 \cdot 10 + 12 = 32$ cm; b) Triunghiul APN este isoscel și AM este bisectoarea unghiului din vârf, prin urmare $AM \perp PN$.

Testul 2. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** B. **4.** D. **5.** C. **6.** A. **7.** C. **8.** A. **II. 1.** $a = 7{,}5$ și $b = 2{,}5$. **2.** 1125 lei. **3.** $P = (1 \cdot 24) \cdot (2 \cdot 12) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 6) = \left(2^3 \cdot 3\right)^4 = 2^{12} \cdot 3^4$. **4.** a) $\sphericalangle A = 180° - 2 \cdot \sphericalangle B = 108°$; b) Cum $DA = DC$ (D se află pe mediatoarea lui AC), avem $\sphericalangle DAC = \sphericalangle C = 36°$. Rezultă că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAC = 72°$, $\sphericalangle BDA = 180° - \sphericalangle B - \sphericalangle BAD = 72°$, deci triunghiul BAD este isoscel, cu $BA = BD$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

1. 121, 144, 169, 196, 225, 400 și 25600. **2.** 2^{10}, $2^6 \cdot 3^2$, $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $3^{22} \cdot 5^{14}$, $2^{2n} \cdot 7^{4n+2}$. **3.** $225 = 15^2$, $256 = 16^2$, $289 = 17^2$, $324 = 18^2$, $361 = 19^2$, $400 = 20^2$, $441 = 21^2$ și $484 = 22^2$. **4.** a) $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $81 = 9^2$, $100 = 10^2$, $900 = 30^2$; b) $5^4 = (5^2)^2$, $2^6 = (2^3)^2$, $12^{10} = (12^5)^2$, $6^{2n} = (6^n)^2$, $13^{4n+6} = (13^{2n+3})^2$. **5.** a) 5^2; b) 13^2; c) $(2 \cdot 3^3)^2$; d) $(2^5)^2$; e) $(2^3 \cdot 3^4)^2$; f) $(2^5 \cdot 3^4)^2$. **6.** a) 12^2; b) 25^2; c) $(3 \cdot 2^{25})^2$; d) $(2 \cdot 3^{24})^2$. **7.** Mulțimea $A = \{0^2, 1^2, 2^2, \dots, 30^2, 31^2\}$ are 32 de elemente. **8.** a) Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci $u(x^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) Cum $u(5n + 2)$, $u(5n + 7) \in \{2, 7\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $5n + 2$ și $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte. **9.** Deoarece $u(3^{45}) = u(3^{44} \cdot 3) = u(81^{11} \cdot 3) = 3$ și $u(2^{62}) = u(2^{60} \cdot 2^2) = u(16^{15} \cdot 4) = 4$, rezultă că $u(a) = 7$, deci a nu este pătrat perfect. **10.** a) 2, 8, 9, 14, 50; b) 2, 3^3, $2 \cdot 5^3$, $6^2 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^6$, $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; c) 2^n, 3^{2m}, $2^n \cdot 5^{3m}$, 7^{2n+1}, 2^{3m-2}; d) $2 \cdot 3^6$; $2^7 \cdot 3$; $2^4 \cdot 3^7$; $3 \cdot 7^{15}$; $2 \cdot 3^{10}$. **11.** a) 15, 21, 24; b) 42, 56, 84; c) 102, 225, 254. **12.** a) 5; b) 2; c) 5; d) 2; e) 20; f) 80; g) 2; h) 1. **13.** a) 6; b) 2; c) 8; d) 12; e) 48; f) 25; g) 13; h) $12 \cdot 7^5$. **14.** a) $x = 225$; b) $x = 258$; c) $x =$

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex

3. $\frac{1}{3}$. **4.** 10 m, 11 m, 12 m, 13 m. **5.** Lungimea traseului este 350 m, iar lungimea pasului este 70 cm. **6.** 27,5 cm. **7.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 19$ cm. **10.** $\sphericalangle A = 150°$; $\sphericalangle B = 45°$; $\sphericalangle C = 105°$; $\sphericalangle D = 60°$. **11.** 90°. **12.** 36°; 72°; 108°; 144°. **13.** 144°; 96°; 72°; 48°. **14.** a) Fie $ABCDE$ un pentagon. Trasăm diagonalele AC și AD. Avem $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = (\sphericalangle BAC + \sphericalangle B + \sphericalangle BCA) + (\sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD + \sphericalangle ADC) + (\sphericalangle DAE + \sphericalangle ADE + \sphericalangle E) = 180° + 180° + 180° = 540°$; b) Analog, obținem rezultatul 720°. **15.** Se aplică teorema lui Pitagora în ΔBCD și în ΔABD. Obținem: $BD = 12$ cm, $AD = 9{,}6$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = 34{,}8$ cm. **16.** Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile AOB, BOC, COD, DOA. Obținem: $AB = AD = 13$ cm, $BC = CD = 20$ cm; $\mathcal{P}_{ABCD} = 66$ cm. **17.** Punctele A și C sunt egal depărtate de capetele segmentului BD, deci se află pe mediatoarea acestuia. **18.** În ΔABC, mediana BM este egală cu jumătate din latura pe care cade, prin urmare $\sphericalangle B = 90°$. Analog, $\sphericalangle D = 90°$. **19.** a) Punctele A și C se află pe mediatoarea lui BD, deci $AB = AD$ și $CB = CD$. Aplicăm LLL; b) Triunghiurile OAB și BAC sunt 90°-60°-30°, deci $AO = \frac{1}{2}AB = 3$ cm, $AC = 2AB = 12$ cm. Obținem că $OC = 9$ cm. **20.** a) ΔABC este echilateral, deci $\sphericalangle BAC = 60°$, de unde $\sphericalangle CAD = 45°$. Din $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = 45°$ obținem că $AC = CD$; b) Avem $BC = AC = CD$, așadar ΔBCD este isoscel, cu unghiul din vârf $\sphericalangle C = 150°$. Găsim că $\sphericalangle DBC = 15°$. **21.** Notăm $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAD = a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = b$, $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QCD = c$; atunci $2a + 2b + 2c = 360°$, deci $a + b + c = 180°$. Unghiul APC este exterior triunghiului APD, așadar $\sphericalangle APC = a + b$. Deducem că $\sphericalangle QCP + \sphericalangle APC = c + (a + b) = 180°$, prin urmare $AP \parallel CQ$.

IV.2. Paralelogramul

1. 1200 m. **2.** $AD = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm. **3.** 10 dm. **4.** $\sphericalangle C = 48°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 132°$. **5.** $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 108°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 72°$. **6.** a) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 45°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 135°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 100°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 80°$. **7.** $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm. **8.** $\sphericalangle AOB = 100°$; $\sphericalangle BDC = 50°$; $\sphericalangle A = 70°$; $\sphericalangle B = 110°$. **9.** $BC = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm, $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 120°$. **10.** a) D este simetricul lui B față de mijlocul lui AC; b) D este simetricul lui A față de mijlocul lui BC. **13.** Avem $\sphericalangle BMP = \sphericalangle C$ (alt. int.) $\Rightarrow \sphericalangle BMP = \sphericalangle B \Rightarrow PM = PB$ și, analog, $NM = NC$. Atunci $\mathcal{P}_{APMN} = AP + PM + NM + AN = AP + PB + CN + AN = AB + AC = 20$ cm. **14.** Notăm $PN \cap CD = \{S\}$; atunci $MNSD$ și $PQRS$ sunt paralelograme, deci $MN + PQ = DS + SR = DR$, iar $NP + QR = NP + PS = NS = MD$, de unde rezultă concluzia. **15.** Fie AP și BP bisectoare ale unghiurilor A și B ale paralelogramului $ABCD$. Avem $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA = \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, de unde $\sphericalangle APB = 180° - 90° = 90°$. Fie AE și CF bisectoarele unghiurilor A, respectiv C, $E \in DC$, $F \in AB$. Avem $\sphericalangle DEA = \sphericalangle EAB = \frac{1}{2}\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle C = \sphericalangle DCF$, deci $AE \parallel CF$. **16.** Fie AP și BP cele două bisectoare, cu $P \in CD$. Cum $\sphericalangle DPA = \sphericalangle PAB$ (alt. int.) și $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PAD$, deducem că $DA = DP$. Analog, $CP = CB$. Obținem $\mathcal{P}_{ABCD} = 21$ cm. **17.** a) Segmentele CD și EF sunt paralele și egale; b) Folosim

CUPRINS