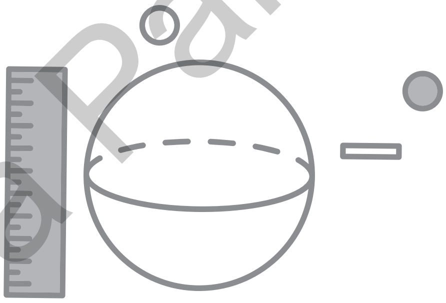

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Mioara Benza, Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Bacalaureat 2025 : Matematică – M_șt-nat, M_tehnologic : teme recapitulative, 40 de teste, după modelul M.E. (10 teste fără soluții) /
Mihai Monea, Steluța Monea, Ioan Șerdean, Adrian Zanoschi. –
Pitești : Paralela 45, 2024
ISBN 978-973-47-4145-8

I. Monea, Mihai
II. Monea, Steluța
III. Șerdean, Ioan
IV. Zanoschi, Adrian

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Mihai Monea
Steluța Monea
Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2025

MATEMATICĂ

M_științele naturii
M_tehnologic

_Teme recapitulative
_40 de teste, după modelul M.E.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

Cuvânt-înainte

Examenul de Bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală și personală, având menirea de a certifica pregătirea științifică și competențele dobândite în liceu, dar și de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecință, performanța la acest examen, și îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conținuturilor, cât și pentru fixare, sistematizare, recapitulare.

Cartea se adresează celor care pregătesc bacalaureatul la matematică, de tip *M_șt-nat* și *M_tehnologic*. Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei și ale probelor de examen.

Trebuie menționat că această carte este adaptată la forma de organizare a probei de matematică din cadrul examenului menționat. Elevii profilului științe ale naturii și cei ai profilului tehnologic au o programă de examen asemănătoare pentru clasele a XI-a – a XII-a, dar cu diferențe importante de conținut pentru clasele a IX-a – a X-a. De aceea, am evidențiat problemele și testele specifice doar elevilor de la profilul științe ale naturii. Astfel, acestea sunt marcate cu semnul „*”.

Cartea are un pronunțat caracter metodic, fiecare paragraf având trei componente: una de inițiere, una de consolidare și una de evaluare. Primele patru capitole sunt rezervate antrenamentului specific pentru examen. Problemele sunt grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată în variantele examenelor din anii precedenți, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Așadar, un elev își poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete și găsește în carte un număr suficient de exerciții cu ajutorul cărora să-și atingă scopul. Problemele din partea de inițiere sunt însoțite doar de răspunsuri. Problemele din partea de consolidare sunt însoțite de indicații și răspunsuri, dar și de soluții detaliate acolo unde acest lucru se impune. Problemele din partea de evaluare nu au răspunsuri decât la testul de tip grilă.

Capitolul al cincilea este rezervat testelor. Acestea au o structură specifică examenului de Bacalaureat. Testele sunt dispuse pe două categorii. Prima categorie este formată dintr-un set de 30 de teste propuse, după modelul subiectelor date la examenul de bacalaureat din ultimii ani și însoțite de rezolvări complete. Testele din a doua categorie sunt pentru autotestare și nu sunt însoțite de rezolvări.

Lucrarea poate fi folosită și pentru învățarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiții reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor și elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârșitul anului școlar.

Autorii

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul: *Dacă p (ipoteza) atunci q (concluzia)*, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza p construim un raționament care conduce la contradicție.
Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții de forma: *Demonstrați că, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *are loc* $p(n)$, unde $p(n)$ reprezintă un enunț care depinde de variabila n. Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k + 1$.

1.1.2. Mulțimi și cardinale

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A, numim **cardinalul** său și notăm Card (A) ca fiind numărul său de elemente.
Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:
P1. Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) – Card $(A \cap B)$;
P2. Card $(A \times B)$ = Card $(A) \cdot$ Card (B).

1.1.3. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ ca fiind distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

P1. $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$; **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

P4. $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c;\ c)$; **P5.** $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -c) \cup (c;\ \infty)$;

P6. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$; **P7.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

P8. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^*$; **P9.** $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x și notăm $[x]$ ca fiind cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x.

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k,\ k+1)$.

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ ca fiind diferența dintre număr și partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $\{x\} \in [0,1)$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c\}$.

I2. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.

I3. Reuniunea a două mulțimi, cu câte 20 de elemente fiecare, are 31 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.

I4. Demonstrați că $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \in \mathbb{N}$.

I5. Arătați că numărul $a = (-5) \cdot \left[0,(4) + 0,1(5)\right]$ este întreg.

I6. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem egalitatea de intervale $[a - b;\ a + b] = [1;\ 7]$.

I7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați cardinalul mulțimii:
$B = \{x = (a-1)(a-2)(a-3) + 4 \mid a \in A\}$.

I8. Determinați intersecția mulțimilor $A = (1, 5)$ și $B = [3, 11]$.

I9. Determinați partea întreagă a numărului $b = 2,13 + 1,88$.

I10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care îl conțin pe d.

3.4. Teste de verificare

Testul 1

1. Fie funcția $f:\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x$. Calculați diferența între cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției f.

2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 7$ și $g(x) = 5$.

3. Determinați valoarea numărului real a pentru care punctul de coordonate $(1, 5)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2ax^3 - 9$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$. Calculați produsul:

$$P = f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(2014).$$

5. Demonstrați că punctul $A(2, 4)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 - 4ax^2 + x + 2$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

6. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și funcția $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2$. Determinați elementele mulțimii $M = \{x \in A \mid f(x) < 18\}$.

Testul 2*

1. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2013} + 3x^5 - 4x$ este impară.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică relația $f(x + 3) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă $f(2) = 11$, calculați $f(14)$.

3. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x\sqrt{3}$ este strict descrescătoare.

4. Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x - 5$ și $h(x) = (f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$. Demonstrați că funcția g este constantă.

5. Demonstrați că graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [2x + 1] + \dfrac{1}{2}$ nu intersectează axa Ox.

6. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 8|$ cu axele de coordonate.

Testul 3

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$. Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy sunt:

A. $(-1; 0)$; B. $(1; 0)$; C. $(0; 1)$; D. $(0; -1)$.

6. Vectori în plan

6.1. NOȚIUNI TEORETICE

6.1.1. Generalități

Vectorul $\overline{AB}$ este caracterizat de $\begin{cases} \bullet \text{ direcţia dreptei } AB \\ \bullet \text{ sensul de la } A \text{ la } B \\ \bullet \text{ modulul egal cu lungimea segmentului } [AB] \end{cases}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceeași direcție dacă dreptele suport sunt paralele sau suprapuse. Spunem că vectorii sunt **coliniari** și notăm $\vec{u} \| \vec{v}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **egali** dacă au aceeași direcție, același sens și același modul. Notăm $\vec{u} = \vec{v}$.

6.1.2. Adunarea vectorilor

Regula paralelogramului: Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
Regula triunghiului: Pentru orice puncte $A, B, C,$ avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Proprietăți: Adunarea vectorilor este asociativă, comutativă, are element neutru vectorul nul $\vec{0}$ și simetrizabilă. Simetricul vectorului $\vec{u}$ se notează $-\vec{u}$ și se numește **vectorul opus**. În particular, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
Scăderea vectorilor: Avem $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$.

6.1.3. Înmulțirea vectorilor cu scalar

Definiție: Fiind dat numărul real α și vectorul $\vec{u}$, vectorul $\alpha\vec{u}$ are aceeași direcție cu $\vec{u}$, același sens dacă $\alpha > 0$, respectiv sens opus dacă $\alpha < 0$ și modulul egal cu $|\alpha||\vec{u}|$.
Proprietăți: Înmulțirea vectorilor cu scalar este distributivă în raport cu adunarea vectorilor.
Teoremă: Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

6.1.4. Relații vectoriale fundamentale

V1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ este paralelogram.

V2. Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PM} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V3. Punctul $N \in [AB]$ pentru care $\frac{NA}{NB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB}}{1+k}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V4. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$, pentru orice P din planul triunghiului.

6.2. Probleme de inițiere

I1. Fie M mijlocul segmentului AB. Determinați valoarea numărului real x, pentru care $\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

I2. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

I3. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

I4. Într-un plan se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

I5. Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

I6. Fie O intersecția diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

I7. Fie $ABCD$ un paralelogram și $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Demonstrați că $x = y$.

I8. Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB = 6$ și $AD = 8$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

I9. Fie $ABCD$ un paralelogram. Determinați $x \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

I10. Fie dreptunghiul $ABCD$ și $M, N \in (AB)$, astfel încât $AM = MN = NB$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{CD}$.

6.3. Probleme de consolidare

C1. Într-un plan se consideră punctele M, N și P. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$.

C2. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

C3. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$.

C4. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Determinați valoarea numărului x pentru care $\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GM} = \vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului.

Clasa a X-a

1. Numere reale

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Radicali

Definiție: Numim **radical** de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, din numărul pozitiv a și notăm $\sqrt[n]{a}$ ca fiind acel număr pozitiv x unic cu proprietatea $x^n = a$.

Observație: Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dacă $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proprietățile radicalului: Următoarele relații sunt adevărate pentru orice a, $b \geq 0$ și $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$.

P1. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$;

P2. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$;

P3. $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}$;

P4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Observație: Dacă n este impar, putem calcula $\sqrt[n]{x}$ și dacă $x < 0$. În aceste condiții $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Observație: Avem $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, dar $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$.

1.1.2. Puteri cu exponent real

Observație: Noțiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $x \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Proprietățile ridicării la putere: Pentru orice $x, y > 0$ și orice $p, r \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

P1. $x^p x^q = x^{p+q}$;

P2. $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$;

P3. $\left(x^{p}\right)^{q}=x^{pq}$; **P4.** $(xy)^{p}=x^{p}y^{p}$.

1.1.3. Logaritmi

Definiție. Fie $a, b>0,\ a\neq 1$. Soluția (unică) a ecuației $a^{x}=b$ se numește **logaritm în baza *a* din *b*** și se notează cu $\log_{a}b$.

Proprietățile logaritmului: Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice $a, b, x, y>0,\ a, b\neq 1$:

P1. $\log_{a}xy=\log_{a}x+\log_{a}y$; **P2.** $\log_{a}\dfrac{x}{y}=\log_{a}x-\log_{a}y$;

P3. $\log_{a}x^{\alpha}=\alpha\log_{a}x,\ \alpha\in\mathbb{R}$; **P4.** $\log_{a}x=\dfrac{\log_{b}x}{\log_{b}a}$.

Observație: Dacă $a, b\in\mathbb{N}$ sunt numere prime diferite, atunci $\log_{a}b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Calculați $(-1)^{5}+(-2)^{4}+(-3)^{3}+(-4)^{2}+(-5)$.

I2. Calculați $(-1)^{1}+(-1)^{2}+\ldots+(-1)^{100}$.

I3. Calculați $8^{\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$.

I4. Calculați $\sqrt[3]{125}+\sqrt{16}+\sqrt[3]{-27}$.

I5. Calculați $\log_{11}11+\log_{7}\dfrac{1}{7}$.

I6. Calculați $\log_{3}81+\log_{5}25-\lg 100000$.

I7. Ordonați crescător numerele $a=-\sqrt[3]{27}$, $b=\log_{2}\dfrac{1}{16}$, $c=-2$.

I8. Demonstrați că $\log_{4}64+\sqrt[3]{1000}=\sqrt{16}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$.

I9. Demonstrați că $\log_{11}121<\sqrt[3]{27}$.

I10. Dacă $\log_{2}3=a$, demonstrați că $\log_{2}6=1+a$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Calculați $\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{72}$.

C2. Arătați că $2\sqrt{14}-\sqrt{\dfrac{7}{2}}-5\sqrt{\dfrac{8}{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

7. Probleme de sinteză din materia claselor IX–X

Varianta 1

1. Demonstrați că numărul $A = \log_5\left(9-\sqrt{6}\right)+\log_5\left(9+\sqrt{6}\right)-\log_5 3$ este natural.

2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx + 2 = 0$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, știind că $x = 9$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}+5^{x+2}=150$.

4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are 45 de submulțimi cu două elemente.

5. În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1, 3)$ și $B(5, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați a, știind că lungimea segmentului AB este 5.

6. Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A) = 30°$ și raza cercului circumscris $R = 10$ cm.

Varianta 2

1. Determinați numărul real x, știind că numerele $2x + 1$, $3x - 5$ și $2x - 5$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$. Demonstrați că:

$$\frac{f\left(\sqrt{7}\right)-f\left(\sqrt{5}\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \in \mathbb{N}.$$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+2}=3x-1$.

4. După două scumpiri succesive de preț, una cu 10% și una cu 15%, un produs costă 253 de lei. Determinați prețul inițial al produsului.

5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1,3)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$.

6. Determinați raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic cu catetele 6 cm, respectiv 8 cm.

Varianta 3

1. Demonstrați că $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}$.

2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Calculați $(f \circ f \circ f)(1)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1)+\lg(4x+1)=1$.

4. Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Determinați numărul tuturor numerelor pare de două cifre diferite care se pot forma cu elementele mulțimii A.

5. În sistemul de coordonate xOy, considerăm punctele $A(2, 1)$, $B(8, 3)$ și $C(0, 3)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABDC$ este paralelogram.

Clasa a XI-a

1. Matrice

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Generalități

Forma generală: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, unde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ se numesc **coeficienți**.

Notăm cu $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane și coeficienți în mulțimea K.

Dacă $m = n$, matricele se numesc **pătratice** și avem $\mathcal{M}_{n\times n}(K) \overset{\text{not}}{=} \mathcal{M}_n(K)$.

Cazuri particulare: $O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – **matricea nulă**, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – **matricea unitate**.

Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, **transpusa** sa este matricea

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(K).$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times p}(K),$$ unde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ și $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Proprietățile înmulțirii matricelor: Operația de înmulțire a matricelor:
- este asociativă;
- în general **nu** este comutativă;
- operația de înmulțire a matricelor pătratice admite element neutru matricea unitate I_n;
- este distributivă în raport cu adunarea matricelor.

Puterile unei matrice pătratice:
Fiind dată o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Propoziție: Sunt adevărate relațiile $A^kA^l = A^lA^k = A^{k+l}$ și $(A^k)^l = A^{kl}$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și $k, l \in \mathbb{N}^*$.

1.1.3. Urma unei matrice pătratice

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci **urma** sa este $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Proprietăți: Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ și $\alpha \in K$, avem:
T1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$; **T2.** $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$; **T3.** $Tr(AB) = Tr(BA)$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Determinați valorile numerelor reale a, b, pentru care matricele: $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & 4 \\ 3b-5 & 7 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$ sunt egale.

I2. Calculați suma matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

I3. Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, determinați matricea $-3A$.

I4. Determinați produsul matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

I5. Considerăm matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați B^2.

I6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^2 - 7A = 2I_2$.

I7. Pentru matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ demonstrați că $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

I8. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $A^2 = xA$.

I9. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = BA$.

I10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinați cel mai mic număr natural n, pentru care $A^n = O_2$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Demonstrați că, oricare ar fi numărul real a, matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2a+5 \\ 3 & 3a+2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ nu pot fi egale.

C2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Demonstrați că:

$(2x + 2)A - (3x + 3)B = O_2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

C3. Fie matricea $A_k = \begin{pmatrix} 2^k & 2k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, unde $k \in \mathbb{N}$. Determinați suma elementelor matricei $B = A_1 + A_2 + ... + A_5$.

C4. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = O_2$.

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Legi de compoziție

Fie G o mulțime nevidă și o lege „$*$”. Legea „$*$”:

● este **lege de compoziție** pe G dacă $x*y\in G$ pentru orice $x, y\in G$ (se mai spune că mulțimea G este **parte stabilă** în raport cu legea „$*$”);

● este **comutativă** dacă $x*y=y*x$ pentru orice $x, y\in G$;

● este **asociativă** dacă $x*(y*z)=(x*y)*z$ pentru orice $x, y, z\in G$;

● admite **element neutru** dacă există un element $u\in G$, astfel încât $x*u=u*x=x$ pentru orice $x\in G$;

● este **simetrizabilă** dacă pentru orice $x\in G$ există un element $x'\in G$, astfel încât $x*x'=x'*x=u$.

Observație: Elementul x' se numește **simetricul** lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”.

1.1.2. Mulțimea claselor de resturi

Fie mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ și $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $r\in\{0, 1, 2, ..., n-1\}$, definim mulțimea $\hat{r}=\{z\in\mathbb{Z} \mid \text{restul împărţirii lui } z \text{ la } n \text{ este egal cu } r\}$.

Mulțimea $\mathbb{Z}_n=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ se numește mulțimea **claselor de resturi modulo *n***.

Definim operațiile:

● $\hat{x}+\hat{y}=\hat{z}$, unde z este restul împărțirii numărului $x+y$ la n;

● $\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{t}$, unde t este restul împărțirii numărului xy la n.

Proprietăți:

● adunarea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție asociativă și comutativă;

● adunarea admite element neutru elementul $\hat{0}$;

● orice element $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$ este **simetrizabil**, simetricul său fiind elementul $\widehat{n-x}$, care se mai notează $-\hat{x}$;

● înmulțirea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție comutativă, asociativă și distributivă în raport cu adunarea;

● înmulțirea admite element neutru elementul $\hat{1}$;

● evident, $\hat{0} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ pentru orice $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$;

● dacă n este număr prim, atunci din $\hat{x}\hat{y} = \hat{0}$ obținem $\hat{x} = \hat{0}$ sau $\hat{y} = \hat{0}$; dacă n nu este prim, nu este adevărat întotdeauna (de exemplu, în $\mathbb{Z}_6$ avem $\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$);

● un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă există $\hat{y}$ astfel încât $\hat{x}\hat{y} = \hat{1}$; atunci $\hat{y}$ este inversul lui $\hat{x}$ și se notează $\hat{x}^{-1}$;

● un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă și numai dacă numerele x şi n admit divizor comun doar pe 1.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Calculați $4 \circ 9$.

I2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este comutativă.

I3. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este asociativă.

I4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că 3 este elementul neutru al acestei legi.

I5. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul elementului $x = 7$ în raport cu această lege.

I6. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Determinați valoarea numărului real x, pentru care $x \circ x \circ x = 21$.

I7. În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2} + \hat{5}$.

I8. În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2} \cdot \hat{5}$.

I9. Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y \in C$, avem $X + Y \in C$.

I10. Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y \in C$, avem $X \cdot Y \in C$.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Demonstraţi că numărul $a = \lg 30 + \lg 2 - \lg 6$ este natural.

(5p) **2.** Demonstraţi că ecuaţia $(a^2 + 1)x^2 - 2x + 1 = 0$ nu admite rădăcini reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.

(5p) **3.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

Calculaţi $f\left(-\frac{1}{2}\right) f(-1) f(0) f(1) f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(5p) **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea $\left\{C_4^3, C_5^2, C_4^2\right\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ şi $C(8, 2)$. Calculaţi distanţa de la C la mijlocul segmentului AB.

(5p) **6.** Calculaţi $(\cos 120° + \cos 60°)(\sin 135° - \sin 45°)$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 2y - az = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$, unde a este un parametru real. Notăm cu A matricea sistemului.

(5p) a) Demonstraţi că tripletul (–1, 2, –5) este soluţie a sistemului în cazul $a = 0$.
(5p) b) Determinaţi determinantul matricei A.
(5p) c) Dacă $a \neq 0$, demonstraţi că soluţiile sistemului nu depind de a.

2. Se consideră mulţimea $H = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$.

(5p) a) Demonstraţi că mulţimea H este parte stabilă în raport cu adunarea din $\mathbb{Z}_8$.
(5p) b) Determinaţi $x \in H$ cu proprietatea că $x^3 = \hat{0}$.
(5p) c) Calculaţi $\hat{0}^{2012} + \hat{2}^{2012} + \hat{4}^{2012} + \hat{6}^{2012}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.
(5p) b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
(5p) c) Demonstraţi că $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

(5p) a) Calculaţi $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x} dx$.
(5p) b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, e] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.
(5p) c) Demonstraţi că $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx \leq 0$.

Testul 2

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculaţi $C_6^3 - A_4^2 + 3$.
(5p) **2.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3 (x^2 - 16) = 2$.
(5p) **3.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pentru care $a_1 = 2$ şi $a_5 = 18$. Calculaţi a_{2012}.
(5p) **4.** După două scumpiri succesive cu 10% şi apoi cu 20%, preţul final al unui produs este 1 320 de lei. Determinaţi preţul iniţial.

(5p) **5.** În sistemul de coordonate carteziene xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ şi $C(m, 3)$. Determinaţi valoarea numărului real m, ştiind că punctele A, B şi C sunt coliniare.

(5p) **6.** Demonstraţi că $\sin^2 20° + \sin^2 70° = 1$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Demonstraţi că $A^2 - 6A - I_2 = O_2$.

(5p) b) Demonstraţi că matricea A este inversabilă şi determinaţi inversa sa.

(5p) c) Demonstraţi că $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = O_2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X - a \in \mathbb{R}[X]$. Notăm cu x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile sale.

(5p) a) Determinaţi valoarea numărului real a, ştiind că $x_1 = 1$.

(5p) b) Demonstraţi că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

(5p) c) Determinaţi valoarea numărului real a, ştiind că polinomul f are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x + 1)$.

(5p) a) Demonstraţi că $f'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

(5p) b) Demonstraţi că funcţia f este strict descrescătoare.

(5p) c) Demonstraţi că $\frac{x}{x+1} \le \ln(x+1)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

2. Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$.

(5p) a) Calculaţi $\int \left(f(x) - \frac{x+1}{x^2} \right) dx$.

(5p) b) Calculaţi $\int_1^2 f(x)dx$.

(5p) c) Folosind, eventual, inegalitatea $x^2 + 1 \ge 2x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, demonstraţi că $\int_1^e f(x)dx \ge 3$.

Testul 11

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi $x \in (0, \infty)$ pentru care numerele 2, $x + 3$, 8 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) **2.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2012} + x^2 + 1$. Demonstraţi că:

$$f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 0.$$

(5p) **3.** Se consideră mulţimea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Câte submulţimi ale mulţimii A au cel puţin 5 elemente?

(5p) **4.** Ordonaţi crescător numerele $\dfrac{1}{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}$, $\log_2 \dfrac{1}{8}$ şi $0,(13)$.

(5p) **5.** Într-un sistem de axe xOy, se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ şi $C(4, 2)$. Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

(5p) **6.** Demonstraţi că $\cos 10° + \cos 30° + \cos 50° + \ldots + \cos 170° = 0$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Demonstraţi că $A^2 - I_2 = O_2$.

(5p) b) Demonstraţi că matricea A este inversabilă şi determinaţi inversa sa.

(5p) c) Daţi exemplu de două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ pentru care $XY = O_2$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_6$ definim operaţia „$\oplus$" definită prin $x \oplus y = x + y + \hat{3}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_6$.

(5p) a) Calculaţi $\hat{5} \oplus \hat{4}$.

(5p) b) Demonstraţi că legea „$\oplus$" este asociativă.

(5p) c) Determinaţi elementul neutru al legii „$\oplus$".

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

(5p) a) Demonstraţi că $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$.

(5p) b) Demonstraţi că graficul funcţiei f nu admite puncte de extrem.

(5p) c) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la $+\infty$, la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{2-x}$.

(5p) a) Determinaţi primitivele funcţiei f.

(5p) b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^{2-x}$.

(5p) c) Folosind, eventual, inegalitatea $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, a, $b > 0$, demonstraţi că $\int_0^2 f(x)dx \geq 4e$.

Testul 12*

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi cel mai mare număr întreg x care verifică inegalitatea $x < 3\sqrt{2}$.

(5p) **2.** Demonstraţi că rădăcinile ecuaţiei $x^2 - mx - (m + 2) = 0$ sunt reale distincte, oricare ar fi valoarea parametrului real m.

(5p) **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $3^{4-2x} \leq 81$.

(5p) **4.** Demonstraţi că $C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 2^3$.

(5p) **5.** Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA şi, respectiv, AB ale triunghiului ABC. Arătaţi că $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = 0$.

(5p) **6.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 4$, $BC = 6$ şi $AC = 8$. Determinaţi $\cos A$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În sistemul de axe xOy, se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ şi $C(3, 7)$. Notăm cu M mijlocul laturii BC.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia dreptei AM.

(5p) b) Demonstraţi că triunghiurile AMB şi AMC au arii egale.

(5p) c) Demonstraţi că, pentru orice punct $P \in AM$, triunghiurile ABP şi ACP au aceeaşi arie.

2. Pe mulţimea $A = (0, \infty)$ definim legea „$\circ$” definită prin $x \circ y = \sqrt{xy}$.

(5p) a) Demonstraţi că $16 \circ 81 \in \mathbb{N}$.

(5p) b) Demonstraţi că $1 \circ (16 \circ 81) < (1 \circ 16) \circ 81$.

(5p) c) Demonstraţi că legea „$\circ$” nu este asociativă.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Determinaţi valoarea numărului real a, ştiind că funcţia f este continuă în punctul $x = 1$.

Testul 23

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 2, $x + 2$ şi 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) **2.** Calculaţi $f(1) + f(2)$ pentru funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x^2 + 5) = 1$.

(5p) **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu 2 elemente ale unei mulţimi cu 6 elemente.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuaţie $y = x - 1$ şi punctul $A(2, 2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.

(5p) **6.** Se consideră expresia $E(x) = \sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{2}$. Arătaţi că $E(90°) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru orice număr natural m, definim matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Calculaţi suma $A(1) + A(2) + A(3) + ... + A(10)$.

(5p) b) Demonstraţi că det (A) este număr par, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$.

(5p) c) Demonstraţi că, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, are loc relaţia $\det(A(p + 1)) > \det(A(p))$.

2. Pe mulţimea $(0, \infty)$, definim operaţia „$*$” prin relaţia $x * y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

(5p) a) Demonstraţi că $4 * 3 > 2$.

(5p) b) Demonstraţi că valoarea expresiei $x * x$ este aceeaşi, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

(5p) c) Determinaţi $x \in \mathbb{Q}$ din egalitatea $(2*2)\cdot(4*4)\cdot(6*6)\cdot...\cdot(10*10) = 8^x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^6 - 6x + 10$.

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^6}$.

(5p) b) Determinaţi coordonatele punctului de minim al graficului funcţiei f.

(5p) c) Demonstraţi că $f(0,9) + f(1, 1) > 10$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2-2x+1$.

(5p) a) Calculaţi $\int_1^2 f(x)$.

(5p) b) Calculaţi $\int_0^1 (6x-2)f^2(x)dx$.

(5p) c) Calculaţi $\int_0^1 e^x f(x)dx$.

Testul 24*

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Arătaţi că numărul $x = 2(1+i)-2i$ este real.

(5p) **2.** Calculaţi $(f\circ f)(1)$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+x+1}=1$.

(5p) **4.** Determinaţi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=15$.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$ şi $A(2, 3)$. Determinaţi coordonatele punctului B, ştiind că A este mijlocul segmentului (OB).

(5p) **6.** Calculaţi ctg a, ştiind că $\sin a=\frac{1}{3}$ şi $a\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5p) a) Demonstraţi că $A^2-3A+2I_2=O_2$.

(5p) b) Demonstraţi prin inducţie matematică egalitatea $A^n=(2^n-1)A-(2^n-2)I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(5p) c) Determinaţi valoarea numărului real x din egalitatea

$$A^2+A^3+...+A^{100}=(2^x-103)(A-I_2)+99I_2.$$

2. Fie polinomul $f_n=2nX^{2n+1}-(2n+1)X^{2n}+1$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Determinaţi toate rădăcinile complexe ale polinomului f_1.

(5p) b) Demonstraţi că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, polinomul f_n admite o rădăcină naturală dublă.

(5p) c) Demonstraţi că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, polinomul f_n admite exact trei rădăcini reale.

2. Modele de teste propuse pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferenţa dintre al doilea termen şi primul termen este egală cu 4.

(5p) **2.** Determinaţi punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ cu axele de coordonate.

(5p) **3.** Demonstraţi că ecuaţia $x^2 + mx - m^2 - 2 = 0$ admite soluţii reale distincte, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

(5p) **4.** Demonstraţi că $C_{18}^1 - A_4^2 = P_3$.

(5p) **5.** Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că m($\sphericalangle B$) = 45°, m($\sphericalangle C$) = 30° şi $AB = 10$.

(5p) **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, -4)$ şi $B(0, 8)$. Calculaţi lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul segmentului AB.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră numerele reale a, b şi sistemul $\begin{cases} x + y + az = 4 \\ x + y + z = 3 \\ -3x - y + 2z = b \end{cases}$.

(5p) a) Demonstraţi că sistemul nu are soluţie în cazul $a = 1$.

(5p) b) Rezolvaţi sistemul în cazul $a = 2$, $b = -2$.

(5p) c) Determinaţi valoarea numărului real a pentru care soluţia sistemului verifică condiţia $x + y + 2z = 4$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$.

(5p) a) Determinaţi numărul real a, astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.

(5p) b) Pentru $a = 4$, calculaţi şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - X + 2$.

(5p) c) Demonstraţi că f nu are toate rădăcinile reale, oricare ar fi $a \in (2, +\infty)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \ln x - 2$.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia tangentei duse la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

(5p) b) Determinaţi coordonatele punctului extrem al graficului funcţiei f.

(5p) c) Determinaţi mulţimea numerelor $x \in (0, \infty)$ pentru care $f(x) > -1$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x(x-1), & x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Calculaţi $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$.

(5p) c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, e] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, pentru orice $x \in [1, e]$.

Testul 2

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculaţi $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$.

(5p) **2.** Determinaţi numerele reale a şi b pentru care punctul $A(a, b + 1)$ aparţine graficelor funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi ecuaţia $4^{2-x} = 16$.

(5p) **4.** Rezolvaţi ecuaţia $\log_5 (x + 2) - \log_5 (2x - 5) = 1$.

(5p) **5.** Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ şi este paralelă cu dreapta $y = x + 2$.

(5p) **6.** Demonstraţi egalitatea $\sin 60° + \operatorname{tg} 45° = \cos 30° + \operatorname{ctg} 45°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + A$.

(5p) a) Calculaţi $A \cdot B$.

(5p) b) Calculaţi determinantul matricei $A^2 + A^3$.

Testul 8*

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Demonstraţi că $i^6 + \lg 1000 = 25^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{-27}$.

(5p) **2.** Determinaţi toate numerele întregi a care verifică inegalitatea:

$$a^2 + a - 12 < 0.$$

(5p) **3.** Demonstraţi că graficele funcţiilor f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$ şi $g(x) = -3^x$ nu se intersectează.

(5p) **4.** Calculaţi suma $2^6 + C_6^1 2^5 + C_6^2 2^4 + C_6^3 2^3 + C_6^4 2^2 + C_6^5 2^1$.

(5p) **5.** Fie vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{w} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$. Demonstraţi că:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + 2\vec{w} \cdot \vec{u} = 0.$$

(5p) **6.** Triunghiurile ABC şi MNP au aceeaşi lungime a razei cercului circumscris, $BC = NP$, dar unghiurile $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle M$ de măsuri diferite. Calculaţi suma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle M$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Calculaţi B^2.

(5p) b) Determinaţi numerele reale x, y cu proprietatea $A = xI_2 + yB$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) c) Calculaţi A^{20}.

2. Considerăm polinoamele $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 5X + 1$ şi $g = X^2 - X - 1$.

(5p) a) Determinaţi restul împărţirii lui f la g.

(5p) b) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile lui g, calculaţi $x_1^2 + x_2^2$.

(5p) c) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile lui g, calculaţi $f(x_1) + f(x_2)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

(5p) c) Folosind, eventual, monotonia funcţiei f, demonstraţi că $\frac{\sqrt{e}}{9} < \frac{\sqrt[3]{e}}{4}$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

(5p) a) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei în jurul axei Ox.

(5p) b) Calculaţi $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

(5p) c) Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Testul 9*

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Demonstraţi că numărul $(1-2i)(2+3i)+(2-3i)(1+2i)$ este întreg.

(5p) **2.** Demonstraţi că $x^2-2(m+1)x+m^2+2m+2>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $m\in\mathbb{R}$.

(5p) **3.** Determinaţi mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_x(6x-5)=2$.

(5p) **4.** Determinaţi $x\in\mathbb{N},\ x\geq 3,$ cu proprietatea $A_x^3=2\cdot x$.

(5p) **5.** Fie triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC. Demonstraţi relaţia:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=BC^2.$$

(5p) **6.** Determinaţi toate numerele reale $x\in[0,\ 2\pi]$ care sunt soluţii ale ecuaţiei:

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm cu $Tr(A)=a+d$. De asemenea, fie mulţimea $\{U=X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid X^2=O_2\}$.

(5p) a) Demonstraţi că, oricare ar fi $A,\ B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem $Tr(A+B)=Tr(A)+$ $+Tr(B)$.

(5p) b) Demonstraţi că, oricare ar fi $C\in U$, avem $Tr(C)=0$.

(5p) c) Demonstraţi că, oricare ar fi $X,\ Y\in U$, avem $X+Y\neq I_2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea notată „$\odot$”, definită prin $x\odot y=xy-2x-2y+6$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Calculaţi $1\odot 2\odot 3\odot 4$.

Soluții

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
8	16	9	$8 \in \mathbb{N}$	$a = -1$	(4, 3)	3	[3, 5)	4	–3 și 7

C1. $2^3 = 8$. **C2.** 31 nevide $\Rightarrow$ 32 în total $\Rightarrow$ A are 5 elemente. **C3.** $28 + 28 - 11 = 45$. **C4.** $2^2 = 4$. **C5.** $2 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 5$. **C6.** $2x + 1$ divide pe 6, deci $2x + 1 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$. **C7.** $4x - 2 < 2 < 2x + 6 \Rightarrow x \in (-2, 1)$. **C8.** $12 + 25 - 7 = 30 \Rightarrow 30$ de elevi. **C9.** $A \setminus B = [2, 5)$, deci numărul este 4. **C10.** $A \cup B = (-2, 5)$, deci sunt 6 numere întregi. **C11.** Se obține $a < c < b$. **C12.** $x - 3 \mid 2 \Rightarrow x - 3 \in \{\pm1, \pm2\} \Rightarrow A = \{1, 2, 4, 5\}$. **C13.** $\frac{11}{9} = 1{,}2222....$ deci $P = 2^{10} = 1024$. **C14.** $\frac{13}{6} = 2{,}16666...$, deci cifra 3 nu apare niciodată. **C15.** $\frac{23}{15} = 1{,}53333...$, deci $S = 5 + 3 \cdot 99 = 302$. **C16.** $A - B = (-3, 1] \Rightarrow$ cardinalul mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ este 4. **C17.** $a = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $b = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$, deci $\sqrt{ab} = \sqrt{18 \cdot 2} = 6$. **C18.** Avem $x + 4 = 1 - 2x$ și $x + 4 = 2x - 1$, de unde $x \in \{-1, 5\}$. **C19.** $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{N}$. **C20.** $3x - 2 = \pm 11 \Rightarrow x \in \left\{\frac{13}{3}, -3\right\}$. Dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -3$. **C21.** Avem $\left[\frac{17}{5}\right] = 2$ și $\left\{\frac{11}{6}\right\} = \frac{5}{6}$, deci suma este $\frac{17}{6}$. **C22.** Avem $4 < a < 5$, deci $[a] = 4$. **C23.** $b = 5 + \sqrt{26} \in (10, 11) \Rightarrow [b] = 10$. **C24.** $A = |\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 1| = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 \in \mathbb{N}$. **C25.** $a = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \ldots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{100}}{-1} = \frac{1 - 10}{-1} = 9 \in \mathbb{N}$. **C26.** Avem $\sqrt{3} + \sqrt{25} = 5 + \sqrt{3} \in (6, 7)$, deci $\left[\sqrt{3} + \sqrt{25}\right] = 6$. Apoi $\sqrt{4} + \sqrt{19} = 2 + \sqrt{19} \in (6, 7)$, așadar $\left[\sqrt{4} + \sqrt{19}\right] = 6$. **C27.** Pentru pasul de inducție avem $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} +$

Clasa a XI-a

1. Matrice

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
$a=4$ $b=7$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ -9 & 15 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	calcul	Ambele sunt egale cu 7.	5	calcul	2

C1. $A = B \Leftrightarrow 2a + 5 = 7,\ 3a + 2 = 8 \Rightarrow a = 1$ și $a = 2$, imposibil. **C2.** Se verifică prin calcul. **C3.** $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, unde, $m = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^5 = \dfrac{2^6 - 2}{2 - 1} = 62$, $n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 5 = 2(1 + 2 + \ldots + 5) = 2 \cdot 15 = 30$, $p = \underbrace{(-1) + \ldots + (-1)}_{5 \text{ ori}} = -5$. Atunci $B = \begin{pmatrix} 62 & 30 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ și suma elementelor este 87. **C4.** Se verifică prin calcul. **C5.** Din $2X - AB = A \Rightarrow a = -8$, $b = 9$, $c = -3$ și $d = 1$. Atunci $a + b + c + d = -1$. **C6.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = 6I_3$. **C7.** $A^2 = 6A \Rightarrow d = 6$.

C8. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3 = O_3 \Rightarrow A^k = O_3$, pentru orice $k \geq 3$, deci $A + A^2 + \ldots + A^{20} = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C9.** $A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $S = 17$. **C10.** $A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C11.** Se demonstrează că $A^2 = A$, atunci $A^k = A$, $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, deci $A^{2012} - A^{2011} = A - A = O_2$. **C12.** $3a = 12 \Rightarrow a = 4$. **C13.** Se rezolvă sistemul astfel obținut și rezultă $a = -3$, $b = c = 2$ și $d = -1$. **C14.** Se verifică prin calcul. **C15.** Se verifică prin calcul. **C16.** Se verifică prin calcul. **C17.** Din $a + b + c + d = 10$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, distincte $\Rightarrow \{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Atunci numărul matricelor este $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. **C18.** Se rezolvă sistemul și se obține $X = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -5 & -13 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. **C19.** Se verifică prin calcul. **C20.** $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^{2014} = (A^2)^{1007} = (-I_2)^{1007} = -I_2$.

Test 3: 1. B; **2.** D; **3.** B; **4.** D; **5.** B; **6.** D.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

I. 1. Avem $a = \lg 60 - \lg 6 = \lg 10 = 1$. **2.** $\Delta = -4a^2 < 0$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}^*$. **3.** Din $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ rezultă $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(-1)f(0)f(1); f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. **4.** Avem $A = \{C_4^3,\ C_5^2,\ C_4^2\} = \{4, 6, 10\}$. Notăm p = probabilitatea ca un element din A să fie divizibil cu 3, obținem $p = \frac{1}{3}$. **5.** Notăm M mijlocul lui AB, punctul M va avea coordonatele $M(4, 6)$, de unde $d(C, M) = 4\sqrt{2}$. **6.** Cum $\cos 120° = -\cos 60°$, avem $(\cos 120° + \cos 60°)(\sin 135° - \sin 45°) = 0$. **II. 1.** a) Verificare; b) $\Delta = -5a$; c) Pentru $a \neq 0$, obținem $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ soluția sistemului. **2.** a) Din tabla operației rezultă că H e parte stabilă; b) $x \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$. c) Deoarece $x^3 = \hat{0}$, pentru orice $x \in H \Rightarrow$ suma este $\hat{0}$. **III. 1.** a) $f'(x) = e^x - 1$; b) Din a) $x = 0$ punct de minim pentru f. De aici, f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, \infty)$; c) Deoarece $x = 0$ este punct de minim, alegând $x = \frac{1}{2}$, găsim $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$, adică $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$. **2.** a) $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x}dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2$; b) $\mathcal{V} = \pi\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \pi\int_0^1 t^2 dt = \frac{\pi}{3}$; c) Deoarece $\ln x \leq 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, rezultă $f(x) \leq 0$ și de aici concluzia.

Testul 2

I. 1. 11. **2.** $x \in \{-5, 5\}$. **3.** Se obține rația $r = 4$, $a_{2012} = 8046$. **4.** $x = 1000$. **5.** $m = 5$. **6.** Avem $\sin 70° = \cos 20°$, de unde $\sin^2 20° + \cos^2 20° = 1$. **II. 1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$, de unde $A^2 - 6A - I_2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$;

b) det $A = -1 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = A^{2010}(A^2 - 6A - I) - A^2(A^2 - 6A - I) = A^{2010} \cdot O_2 - A^2 \cdot O_2 = O_2$, folosind a). **2.** a) $f(1) = 0$ conduce la $a = 1$; b) Folosind relațiile lui Viète, găsim că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1) + (x_3 - 1)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$; c) Din b), dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 = (x_3 - 1)^2 = 0$, de unde $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, ceea ce conduce la $a = 1$. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' - \left(\ln(x+1)\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2}$; b) $f'(x) \le 0$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$, de unde f descrescătoare; c) Din b) $\Rightarrow f(x) \le f(0)$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$, adică $\frac{x}{x+1} \le \ln(x + 1)$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$. **2.** a) $\int\left(f(x) - \frac{x+1}{x^2}\right)dx = \int dx = x + C$; b) $\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2} + \ln 2$; c) Din $x^2 + 1 \ge 2x$ avem $x^2 + x + 1 \ge 3x$, de unde $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \ge \frac{3}{x}$, $(\forall)\ x \in [1, e]$. Imediat $\int_1^e f(x)dx \ge 3\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 3\ln x\Big|_1^e = 3$.

Testul 3

I. 1. $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{2}{3}$. **2.** $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$, $m \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. **3.** $x \in \{-3, 3\}$. **4.** $A_5^4 = 120$. **5.** 4. **6.** $2\sqrt{7}$. **II. 1.** a) $\Delta = ab + bc + ac - a^2 - b^2 - c^2$, de unde $-2\Delta = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2$; b) Dacă A, B, C coliniare, $\Delta = 0$, adică $a = b = c$, ceea ce contrazice ipoteza a, b, c impare distincte; c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\Delta|$, iar Δ număr par, căci diferența a două numere impare este număr par. **2.** a) $a = x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$; b) $f(1) + f(2) = -1 + 1 = 0$; c) $f(x) = (x - 1)(x - 2)c(x) + ax + b$, de unde $f(1) = a + b$ și $f(2) = 2a + b$. Cum $f(1) = -1$ și $f(2) = 1$, găsim $a = 2$ și $b = -3 \Rightarrow r = 2x - 3$. **III. 1.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, de unde $y = 1$, asimptota la $+\infty$; b) $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$, f strict crescătoare; c) Fie $g(x) = f(x) - 1$, $g : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$. Obținem că $g(x) = -\frac{1}{x+2}$. În plus, $g(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$, de unde $f(x) - 1 < 0$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$, adică $f(x) < 1$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$. **2.** a) $g'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = (3x^2 - x^3)e^{-x} = f(x)$; b) $\mathcal{A} = \int_0^3 |f(x)|dx = g(x)\Big|_0^3 = \frac{27}{e^3}$; c) $e^{-x} \le 1$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$, conduce la $x^3e^{-x} \le x^3$, de unde $\int_0^1 x^3e^{-x}dx \le \int_0^1 x^3dx$, adică $\int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{4}$, căci $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$.

punct de minim; c) $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)$, de unde $f(x) \le 0$, $(\forall)\ x \in (-\infty, +4)$. **2.** a) $\int_0^1 xe^x dx = 1$;

b) $\int_0^1 xe^{x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_1^e dt = \frac{e-1}{2}$; c) $I_{100} - I_{99} = \int_0^1 (xe^{x^{100}} - xe^{x^{99}})dx = \int_0^1 xe^{x^{99}}(x-1)dx < 0$, $(\forall)\ x \in$

$\in (0, 1)$, de unde concluzia.

Testul 11

I. 1. Din $x + 3 = \frac{8+2}{2}$, obținem $x = 2$. **2.** $f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 3^{2012} + 9 + 1 - 1 - 1 -$ $- 1 + 1 + 1 + 1 - 3^{2012} - 9 - 1 = 0$. **3.** $C_6^5 = 6$ reprezintă numărul submulțimilor cu 5 elemente. În total, vom avea 7 submulțimi cu cel puțin 5 elemente. **4.** Avem $\frac{1}{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|} = \sqrt{3}+\sqrt{2} > 1$, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$. Obținem $\log_2 \frac{1}{8} < 0$, (13) $< \frac{1}{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}$. **5.** Avem $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8}$, de unde concluzia. **6.** Cum $\cos 170° = -\cos 10°$, $\cos 150° = -\cos 30°$, $\cos 130° = -\cos 50°$, $\cos 110° = -\cos 70°$, $\cos 90° = 0$, avem concluzia. **II. 1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, de unde $A^2 - I_2 =$ $= O_2$; b) Din $A^2 = I_2 \Rightarrow A$ este inversabilă și $A^{-1} = A$; c) Din $A^2 - I_2 = O_2 \Rightarrow (A - I_2)(A + I_2) = O_2$, deci putem alege $X = A - I_2$, $Y = A + I_2$. **2.** a) $\hat{0}$; b) $(x \oplus y) \oplus z = x + y + z$; c) $e = \hat{3}$.

III. 1. a) $f'(x) = \left(\frac{x^3+2x^2+2}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x^2+4x)(x^2+1) - 2x(x^3+2x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$; b) $f'(x) = 0$ conduce la abscisa punctului critic $x = 0$. Cum derivata este crescătoare, f nu admite puncte extremale; c) Avem $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x} = 1$, $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = 2$, de unde ecuația asimptotei $y =$ $= x + 2$. **2.** a) $F(x) = \int f(x)dx = e^x - e^{2-x} + C$, $C \in \mathbb{R}$; b) $y(x) = e^x$. Volumul corpului va fi $\mathcal{V} =$ $= \pi\int_0^2 g^2(x)dx = \pi\int_0^2 e^{2x}dx = \frac{e^4-1}{2}$; c) În inegalitatea $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $a, b > 0$, luăm $a = e^x$, $b =$ $= e^{2-x}$. Imediat $e^x + e^{2-x} \ge 2e$, de unde $\int_0^2 f(x)dx \ge \int_0^2 2e = 4e$.

Testul 12*

I. 1. $3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4 \Rightarrow x = 4$. **2.** $\Delta = m^2 + 4m + 8 = (m + 2)^2 + 4 > 0$, $(\forall)\ m \in \mathbb{R}$. **3.** $x \in [0, \infty)$. **4.** $C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 1 + 6 + 1 = 2^3$. **5.** $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \overrightarrow{O}$.

strict descrescătoare pe $(1,\infty)$. **2.** a) $g'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x=f(x)$, deci g este o primitivă a lui f; b) $\int_e^{e^2} f(x)dx=g(x)\Big|_e^{e^2}$. Dar $g\left(e^2\right)=2e^2-e^2=e^2$, $g(e)=e-e=0$, deci $\int_e^{e^2} f(x)dx=e^2$; c) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$. Schimbarea de variabilă $\ln x=t$ conduce la $\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

Testul 23

I. 1. $x+2=\frac{2+10}{2}$; $x=4$. **2.** $f(1)+f(2)=2+5=7$. **3.** $x^2+5=9\Rightarrow x^2-4=0$; $x_1=-2$ și $x_2=2$, care verifică ecuația. **4.** $C_6^2=15$. **5.** $d \parallel h\Rightarrow m_d=m_h=1$, $d: y-2=1\cdot(x-2)$, deci $d: y=x$. **6.** $E\left(90^\circ\right)=\sin 30^\circ+\cos 45^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

II. 1. a) $A(1)+A(2)+A(3)+...+A(10)\ \begin{pmatrix}55 & 20\\ 30 & 60\end{pmatrix}$; b) $\det(A)=6m-6=6(m-1)$, deci este număr par; c) Avem $A(p+1)-A(p)=6>0$ și de aici concluzia. **2.** a) Verificare; b) $x*x=2$; c) Din punctul anterior avem $(2*2)\cdot(4*4)\cdot(6*6)\cdot...\cdot(10*10)=2^5$, deci $2^{3x}=2^5$, adică $x=\frac{5}{3}$.

III. 1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^6}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-6x+10}{x^6}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x^5}+\frac{10}{x^6}\right)=1$; b) Avem $f'(x)=6x^5-6$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=1$. Deoarece $f'(x)<0$ pentru $x<1$ și $f'(x)>0$ pentru $x>1$, deducem că $x=1$ este punct minim. Cum $f(1)=5$, punctul de minim are coordonate $(1;5)$; c) Conform punctului anterior, deducem că $f(0,9)>5$ și $f(1,1)>5$. Adunăm cele două inegalități și obținem concluzia. **2.** a) $\int_1^2 f(x)=\int_1^2\left(3x^2-2x+1\right)dx=x^3\Big|_1^2-x^2\Big|_1^2+x\Big|_1^2=8-1-4+1+2-1=5$; b) Schimbarea de variabilă $f(x)=t$ conduce la egalitatea $(6x-2)dx=dt$. Obținem $\int_2^9 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_2^9=\frac{721}{3}$; c) $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x\left(3x^2-2x+1\right)dx=e^x\left(3x^2-2x+1\right)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x(6x-2)dx=2e-1-e^x(6x-2)\Big|_0^1+\int_0^1 6e^xdx=2e-1-4e-2+6e-6=4e-9$.

Cuprins

Clasa a XII-a