Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică – algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru – 7 /
Ion Tudor. – Ed. a 8-a. – Pitești : Paralela 45, 2024
2 vol.
ISBN 978-973-47-4114-4
Partea 2. – 2024. – ISBN 978-973-47-4193-9
51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2024
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro

EDITURA PARALELA 45

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediţia a VIII-a

EDITURA PARALELA 45

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

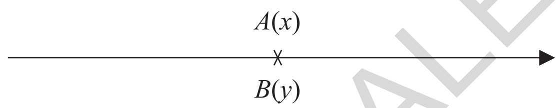
Capitolul II

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Citesc și rețin

Numerele reale x și y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x, respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulțimea numerelor reale, relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci și $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalității același termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z;\ x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z;\ x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru două egalități, se obține tot o egalitate.

Dacă $x = y$ și $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ și $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Definiție: O egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice valori atribuite acestora se numește **identitate**.

Cum se aplică?

1. Știind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătați că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluție:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$$

EDITURA PARALELA 45

2. Se consideră numerele reale a, b, c şi d, care îndeplinesc condiţiile $4a = 3b$ şi $25c = 10d$. Arătaţi că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluţie:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$.
Din $12a = 9b$ şi $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x + 3 = y + 3$; ☐ b) $x - 8 = y - 8$; ☐
c) $x - 1,(3) = y - 1,(3)$; ☐ d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$. ☐

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; ☐ b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$; ☐
c) $x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y$; ☐ d) $x : (-23) = y : (-23)$. ☐

3. Dacă x şi y sunt două numere reale care îndeplinesc condiţia $24x = 36y$, arătaţi că:

a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)

4. Dacă x şi y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătaţi că:

a) $x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

b)

5. Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $2z = 5t$. Arătaţi că:

a) $20z = 50t$; b) $\frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

b)

EDITURA PARALELA 45

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătaţi că:

a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c şi d sunt numere reale care îndeplinesc condiţiile $10a = 15b$ şi $35c = 28d$, arătaţi că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $\sqrt{3a^3} = \sqrt{6b}$ şi $2\sqrt{3a} = \sqrt{6b^3}$. Arătaţi că $|a| = |b|$.

9. Verificaţi identităţile:

a) $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$.

10. Verificaţi identităţile:

a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2)(y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{1}{3}(x - 3)(y - 3)$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

11. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condiţiile $a + b + c = 1$ şi $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătaţi că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

12. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $x \cdot y \cdot z = 1$ şi $\frac{x^2 + yz}{1 + x^3} + \frac{y^2 + zx}{1 + y^3} + \frac{z^2 + xy}{1 + z^3} = 0$. Arătaţi că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătaţi că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) **2.** Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătaţi că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) **3.** Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $4a = 5b$ şi $14c = 10d$. Arătaţi că $12a + 7c = 15b + 5d$.

EDITURA PARALELA 45

Lecţia 2. Ecuaţii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Citesc şi reţin

O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $x \in \mathbb{R}$ (1), se numeşte **ecuaţie de gradul I cu o necunoscută**.

Definiţie: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1), dacă

$au + b = 0$ (u verifică ecuaţia).

A rezolva ecuaţia (1) înseamnă a determina **mulţimea de soluţii**

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b = 0\}.$$

Definiţie: Două ecuaţii de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente**, dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Pentru a rezolva ecuaţia (1) putem folosi proprietăţile relaţiei de egalitate pe $\mathbb{R}$.

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ următoarele ecuaţii:

a) $-20x = -35$; b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6}$.

Soluţie:

a) $-20x = -35 \Leftrightarrow x = \frac{-35}{-20} \Leftrightarrow x = +\frac{^{5)}35}{20} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = 1\frac{3}{4}$;

b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \frac{-6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2$; b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Soluţie:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 2 - 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{^{3)}6}{9}x = \frac{^{5)}5}{10} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$;

b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = (8\sqrt{6}) : (2\sqrt{2}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2(7x+5)}{15}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie:

$\frac{^{6)}3x}{5} - \frac{^{15)}1}{2} = \frac{^{2)}2(7x+5)}{15} \Leftrightarrow 18x - 15 = 4(7x + 5) \Leftrightarrow 18x - 15 = 28x + 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 18x - 28x = 20 + 15 \Leftrightarrow -10x = 35 \Leftrightarrow x = \frac{^{5)}35}{-10} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$.

EDITURA PARALELA 45

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Verificaţi dacă numărul real 4 este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $x + 37 = 41$; ☐ b) $3x - 2 = 10$; ☐ c) $x : (-2) = 2$. ☐

b)

2. Verificaţi dacă numărul real $\frac{1}{2}$ este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $x + \frac{3}{2} = 2$; ☐ b) $1{,}5 - x = 1$; ☐ c) $2\frac{1}{2} + x = 2$. ☐

b)

c)

3. Verificaţi dacă numărul real $\sqrt{3}$ este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $\sqrt{3}\,x + 2 = 0$; ☐ b) $x : \sqrt{3} + 3 = 4$; ☐ c) $\sqrt{6}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. ☐

c)

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $8x = 4$; b) $6x = 9$; c) $4x = 6$; d) $6x = 2$;
e) $-10x = 15$; f) $18x = -12$; g) $-14x = -8$; h) $-15x = -9$.

c)

h)

5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $x + 7 = 11$; b) $x - 8 = 10$; c) $x + 4 = 17$; d) $x - 5 = 14$;
e) $15 + x = 8$; f) $x - 2 = -7$; g) $x + 31 = 9$; h) $x - 6 = -5$.

EDITURA PARALELA 45

Lecţia 4. Sisteme de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

Citesc şi reţin

Definiţie:

O ecuaţie de forma $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ sau $b \neq 0$ şi $x, y \in \mathbb{R}$ (1), se numeşte **ecuaţie liniară cu două necunoscute**.

Definiţie:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1), dacă $au + bv + c = 0$ (u şi v verifică ecuaţia). Ecuaţia (1) are o infinitate de soluţii.

Definiţie:

Ansamblul a două ecuaţii liniare cu două necunoscute x şi y, scris sub forma:

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (2), se numeşte **sistem de două ecuaţii cu două necunoscute**.

Definiţie:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numeşte **soluţie a sistemului** (2), dacă $a_1u + b_1v + c_1 = 0$ şi $a_2u + b_2v + c_2 = 0$.

A rezolva sistemul de ecuaţii (2) înseamnă a determina mulţimea soluţiilor sale. Mulţimea soluţiilor unui sistem se notează cu S.

Mulţimea soluţiilor S ale sistemului de ecuaţii (2) este intersecţia mulţimilor de soluţii ale ecuaţiilor componente.

Definiţie:

Două sisteme de ecuaţii se numesc **echivalente**, dacă au aceeaşi mulţime a soluţiilor.

A. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda substituţiei

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda substituţiei sunt:

– exprimarea uneia dintre necunoscute dintr-o ecuaţie în funcţie de cealaltă necunoscută;
– substituirea necunoscutei respective în cealaltă ecuaţie a sistemului, care devine astfel o ecuaţie cu o singură necunoscută;
– rezolvarea ecuaţiei cu o necunoscută;
– aflarea celeilalte necunoscute şi determinarea mulţimii soluţiilor sistemului.

EDITURA PARALELA 45

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x = 7y \\ 2x - y = 13 \end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases} x = 7y \\ 2 \cdot 7y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 14y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 13y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ deci } S =$$
$= \{(7; 1)\}$.

2. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x + 4(-3x - 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x - 12x - 8 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ -7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -\dfrac{14}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ deci } S = \{(-2; 4)\}.$$

3. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ 3 \cdot \dfrac{2y}{5} - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ \dfrac{6y}{5} - {}^{5)}2y = {}^{5)}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ 6y - 10y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ -4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ y = -\dfrac{20}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 \cdot (-5)}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}, \text{ deci } S =$$
$= \{(-2; -5)\}$.

B. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda reducerii

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda reducerii sunt:
- înmulţirea fiecărei ecuaţii cu câte un număr, astfel încât prin adunarea ecuaţiilor obţinute termenii care conţin una dintre necunoscute să se reducă;
- rezolvarea ecuaţiei obţinute după reducerea uneia dintre necunoscute;
- reducerea celeilalte necunoscute în mod asemănător sau aflarea acesteia prin metoda substituţiei şi determinarea mulţimii soluţiilor sistemului.

EDITURA PARALELA 45

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi prin metoda reducerii sistemul de ecuaţii $\begin{cases}-x+y=-4\\ x+7y=12\end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases}-x+y=-4\\ \underline{x+7y=12}\\ /\quad 8y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8y=8\\ x+7y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{8}{8}\\ x+7y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ x+7\cdot 1=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ x+7=12\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ x=12-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ x=5\end{cases}, \text{ deci } S=\{(5;\ 1)\}.$$

2. Rezolvaţi prin metoda reducerii sistemul de ecuaţii $\begin{cases}3x-2y-3=0\\ 14x-3y=-5\end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases}3x-2y-3=0\\ 14x-3y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y=3 & \big|\cdot(-3)\\ 14x-3y=-5 & \big|\cdot 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9x+6y=-9\\ \underline{28x-6y=-10}\\ 19x\quad /\quad = -19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}19x=-19\\ 3x-2y=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{19}{19}\\ 3x-2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ 3\cdot(-1)-2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ -3-2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ -2y=3+3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ -2y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-\dfrac{6}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-3\end{cases}, \text{ deci } S=\{(-1;\ -3)\}.$$

3. Rezolvaţi prin metoda reducerii sistemul de ecuaţii $\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}=4\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases}\dfrac{^{\sqrt{2})}x}{\sqrt{2}}-\dfrac{^{\sqrt{2})}y}{\sqrt{2}}=4\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x\sqrt{2}}{2}-\dfrac{y\sqrt{2}}{2}={}^{2)}4\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x\sqrt{2}}{2}-\dfrac{y\sqrt{2}}{2}=\dfrac{8}{2}\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\sqrt{2}-y\sqrt{2}=8 & |\cdot 3\\ 8x+3y=-\sqrt{2} & |\cdot\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=24\\ \underline{8\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=-2}\\ 11\sqrt{2}x\quad /\quad =22\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}11\sqrt{2}x=22\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{22}{11\sqrt{2}}\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{^{\sqrt{2})}2}{\sqrt{2}}\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\\ 8x+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ 8\sqrt{2}+3y=-\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

EDITURA PARALELA 45

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VII-a
Capitolul: Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, atunci $\sqrt{5}x = y\sqrt{5}$. A F

(7p) **2.** Soluţia ecuaţiei $\frac{1}{7} + x = \frac{8}{7}$, unde $x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$. A F

(7p) **3.** Mulţimea $S = \{(3; -2)\}$ este soluţia sistemului $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Fracţiile ordinare $\frac{n+1}{6}$ şi $\frac{2}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, sunt echivalente pentru $n =$ ....

(7p) **2.** Ştiind că, după o ieftinire cu 5%, o rachetă de tenis de câmp costă 152 lei, înseamnă că preţul rachetei înainte de ieftinire era de ....lei.

(7p) **3.** Soluţia sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ este perechea de numere reale $(x; y) =$ ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Un sfert dintr-un număr este cu 3,5 mai mic decât trei cincimi din numărul respectiv. Numărul este egal cu:
A. 15; B. 28; C. 10; D. 12.

(8p) **2.** Rotunjind la prima zecimală soluţia ecuaţiei $3 - \sqrt{6}x = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}x$, unde $x \in \mathbb{R}$, obţinem numărul:
A. 1,7; B. 1,4; C. 2,5; D. 3,2.

(8p) **3.** Într-o clasă sunt 28 de elevi. Ştiind că numărul fetelor este cu 5 mai mic decât dublul numărului băieţilor, atunci numărul băieţilor este egal cu:
A. 10; B. 15; C. 12; D. 11.

EDITURA PARALELA 45

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. Radu a cheltuit o sumă de bani în 3 zile. În prima zi a cheltuit $\frac{3}{8}$ din sumă, în ziua

(8p) următoare a cheltuit $\frac{8}{9}$ din suma cheltuită în ziua precedentă, iar în ultima zi a cheltuit restul de 175 lei. Calculați suma de bani cheltuită de Radu a doua zi.

V. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{3y}{\sqrt{3}} = 2 \\ \frac{x+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{y-2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(8p) a) Aflați soluția sistemului de ecuații.

(8p) b) Comparați numerele reale x și y.

EDITURA PARALELA 45

Capitolul III
ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide

Citesc şi reţin

Definiţie: Produsul cartezian a două mulţimi nevide A şi B, notat $\boldsymbol{A \times B}$, este mulţimea formată cu perechile ordonate (a, b), unde $a \in A$ şi $b \in B$.

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Observaţii:

1. $(a, b) \neq (b, a)$, dacă $a \neq b$.
2. $A \times B \neq B \times A$, dacă $A \neq B$.

Teoremă: Dacă card $A = m$ şi card $B = n$, atunci $\text{card}(A \times B) = m \cdot n$.

Cum se aplică?

1. Se consideră mulţimile $A = \{d, f\}$ şi $B = \{p, b\}$. Determinaţi mulţimea $A \times B$.

Soluţie:

$A \times B = \{(d, p), (d, b), (f, p), (f, b)\}$.

2. Determinaţi mulţimile $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$, ştiind că $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.

Soluţie:

Din $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$ rezultă că $D = \{0, 3\}$ şi $C = \{0, 1, 3, 5\}$, prin urmare $C \cup D = \{0, 1, 3, 5\}$, $C \cap D = \{0, 3\}$, $C \setminus D = \{1, 5\}$ şi $D \setminus C = \varnothing$.

3. Se consideră mulţimile $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\}$ şi $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\}$.

a) Enumeraţi elementele mulţimilor E şi F.

b) Determinaţi mulţimile $E \times F$ şi $F \times E$.

Soluţie:

a) $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\} = \{1, 2\}$, $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\} = \{-1, 0, 1\}$;

b) $E \times F = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$;
$F \times E = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$.

EDITURA PARALELA 45

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele notaţii:

a) $A \times B$; b) $C \times D$; c) $E \times F$; d) $M \times N$.

2. Se consideră mulţimile $A = \{3\}$ şi $B = \{4, 5\}$. Determinaţi mulţimea $A \times B$.

3. Se consideră mulţimile $C = \{a, b\}$ şi $D = \{d, f\}$. Determinaţi mulţimea $C \times D$.

4. Enumeraţi elementele mulţimilor $A \times B$ şi $B \times A$ în fiecare dintre cazurile:

a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{5\}$; b) $A = \{t\}$, $B = \{a, b\}$;
c) $A = \{2, 7\}$, $B = \{3, 8\}$; d) $A = \{f, g\}$, $B = \{o, v\}$;
e) $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 3, 9\}$; f) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{c, d, h\}$.

e)

5. Se consideră mulţimile $A = \{6, 7\}$ şi $B = \{4, 8, 9\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(6, 9) \in A \times B$; ☐ b) $(4, 7) \in A \times B$; ☐ c) $(7, 2) \in A \times B$; ☐
d) $(7, 4) \in B \times A$; ☐ e) $(8, 6) \in B \times A$; ☐ f) $(9, 5) \in B \times A$. ☐

6. Se consideră mulţimile $E = \{g, h, i\}$ şi $F = \{m, n\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(g, n) \notin E \times F$; ☐ b) $(i, m) \in E \times F$; ☐ c) $(n, h) \in F \times E$; ☐
d) $(n, g) \notin F \times E$; ☐ e) $(h, m) \in E \times F$; ☐ f) $(m, i) \in F \times E$. ☐

7. Determinaţi card $C \times D$ în următoarele cazuri:

a) card $C = 7$ şi card $D = 8$; b) card $C = 6$ şi card $D = 9$.

a)

EDITURA PARALELA 45

8. Ştiind că $\mathcal{D}_n$ reprezintă mulţimea divizorilor naturali ai numărului întreg n, determinaţi mulţimile:

a) $\mathcal{D}_4 \times \mathcal{D}_5$; b) $\mathcal{D}_3 \times \mathcal{D}_8$.

b)

9. Determinaţi mulţimile A şi B, ştiind că:

a) $A \times B = \{(5, 4), (5, 6), (7, 4), (7, 6), (9, 4), (9, 6)\}$;

b) $B \times A = \{(d, f), (d, g), (f, f), (f, g), (h, f), (h, g), (p, f), (p, g)\}$;

c) $B \times A = \{(2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (8, 2), (8, 5)\}$.

c)

EDITURA PARALELA 45

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

10. Dacă notăm cu A mulţimea numerelor prime de o cifră şi cu B mulţimea numerelor compuse de o cifră, determinaţi mulţimea $B \times A$.

11. Se consideră mulţimile $C = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „mediana”$\}$ şi $D = \{y \mid y$ este literă a cuvântului „tangenta”$\}$. Determinaţi card $D \times C$.

12. Se consideră mulţimile $E = \{a \mid \overline{25a7} < \overline{25aa}\}$ şi $F = \{b \mid \overline{8bb0} > \overline{85b1}\}$. Determinaţi mulţimea $E \times F$.

13. Determinaţi mulţimile $A \times B$ şi $B \times A$, ştiind că:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{2x} \vdots 3\} \quad \text{şi} \quad B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \overline{x2} \vdots 4\}.$$

14. Determinaţi mulţimile $E \times F$ şi $F \times E$ în următoarele cazuri:

a) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$ şi $F = \{y \in \mathbb{Z}^* \mid |y| \leq 1\}$;

b) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$ şi $F = \{y \in \mathbb{N}^* \mid y \leq 2\}$.

15. Enumeraţi elementele mulţimilor $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ şi $F \setminus E$ în următoarele cazuri:

a) $E \times F = \{(x, x), (x, t), (y, x), (y, t), (z, x), (z, t)\}$;

b) $F \times E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$.

16. Se consideră mulţimile $E = \{y \mid \overline{xy}$ este număr prim$\}$ şi $F = \{c \mid \overline{abc}$ este pătrat perfect$\}$. Determinaţi card $E \times F$.

17. Se consideră mulţimile $A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = b^2, a \neq 0\}$ şi $B = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = z^3, x \neq 0\}$. Efectuaţi $B \times A$.

18. Enumeraţi elementele mulţimii $A \times B$, ştiind că mulţimile A şi B îndeplinesc simultan condiţiile:

i) $A \cup B = \{b, c, d\}$; ii) $A \cap B = \{b, d\}$; iii) $A \setminus B = \varnothing$.

19. Determinaţi mulţimea $E \times F$, pentru mulţimile E şi F care îndeplinesc simultan condiţiile:

i) $E \cap F = \{4, 5\}$; ii) $E \setminus F = \varnothing$; iii) $F \setminus E = \{7, 8\}$.

20. Determinaţi mulţimea $E \times D$, ştiind că mulţimile D şi E îndeplinesc simultan condiţiile:

i) $D \cup E = \{d, g, p, t\}$; ii) $D \setminus E = \varnothing$; iii) $E \setminus D = \{d, t\}$.

21. Se consideră mulţimile A şi B. Dacă card $A \cap B = 5$, card $A \setminus B = 2$ şi card $B \setminus A = 3$, calculaţi card $A \times B$.

22. Se consideră mulţimile E şi F. Dacă card $E \cup F = 9$, card $E \setminus F = 1$ şi card $F \setminus E = 4$, determinaţi card $F \times E$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

23. Determinaţi card $E \times F$, unde $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |1 - 2x| \leq 3\}$ şi $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{3x+7}{2x+3} \in \mathbb{N}\right\}$.

24. Se consideră mulţimile $A = \{3n - 2, n + 5, 5n + 4\}$ şi $B = \{3n - 1, n + 4, 4n + 7\}$. Determinaţi numărul întreg n, ştiind că $A \times B = B \times A$.

25. Determinaţi card $A \times B$ pentru mulţimile:

$$A = \left\{\overline{abc} \,\middle|\, \sqrt{a+b+c} \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \sqrt{a \cdot b \cdot c} \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ şi } B = \left\{\overline{xyz} \,\middle|\, \overline{xyz} = \left(1+2+3+...+\overline{yz}\right) - 5x\right\}.$$

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră mulţimile $E = \{2, 4\}$ şi $F = \{4, 5, 6\}$. Determinaţi mulţimile:

a) $E \times F$; b) $F \times E$.

(3p) **2.** Determinaţi mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$, ştiind că $A \times B = \{(x, y), (x, t), (y, y), (y, t), (z, y), (z, t), (t, y), (t, t)\}$.

(3p) **3.** Se consideră mulţimile $E = \{x \mid 2 \mid \overline{7x}$ şi $4 \nmid \overline{7x}\}$ şi $F = \{y \mid 3 \mid \overline{8y5}$ şi $9 \nmid \overline{8y5}\}$. Efectuaţi $F \times E$.

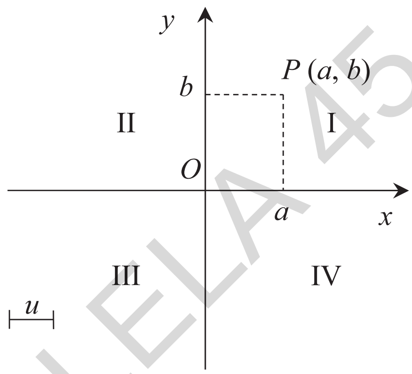
EDITURA PARALELA 45

Lecția 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Citesc și rețin

Definiție: Prin **sistem de axe ortogonale** înțelegem figura formată din două axe ale numerelor, care sunt perpendiculare și care au drept origine punctul lor de intersecție.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu originea în punctul O. Dreapta Ox se numește **axa absciselor**, dreapta Oy se numește **axa ordonatelor**, iar segmentul de lungime u a fost ales drept unitate de măsură.



Sistemul de axe ortogonale xOy împarte planul în patru părți numite **cadrane**, notate cu cifrele romane I, II, III și IV ca în figură.

Fiecărei perechi de numere $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi asociem ca în figură un punct P, notat $\boldsymbol{P(a, b)}$ și care se citește „punctul P de abscisă a și ordonată b" sau „punctul P de coordonate a și b".

Observație: Fie M mijlocul segmentului AB. Dacă $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$, atunci

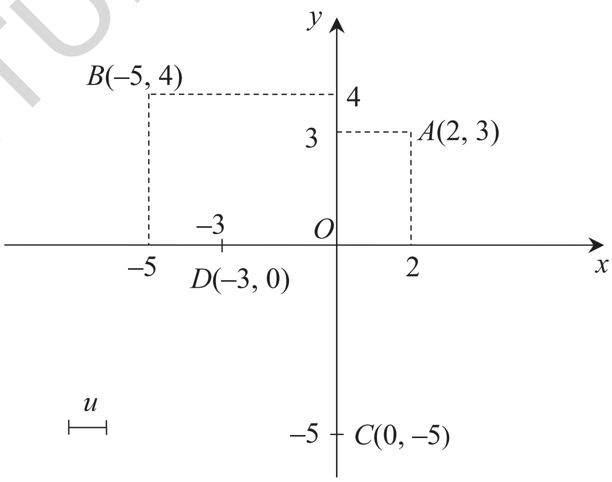
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Cum se aplică?

1. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy următoarele puncte:

a) $A(2, 3)$; b) $B(-5, 4)$; c) $C(0, -5)$; d) $D(-3, 0)$.

Soluție:



EDITURA PARALELA 45

2. Notăm cu M mijlocul segmentului EF. Considerând punctele $M(-1, 4)$ şi $F(2, -3)$, determinaţi coordonatele punctului E.

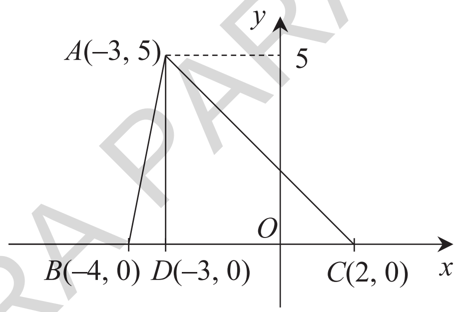
Soluţie:

Notăm cu x şi cu y abscisa, respectiv ordonata punctului E. Deoarece $M(-1, 4)$ şi $M\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+(-3)}{2}\right)$, rezultă că $\frac{x+2}{2} = -1$ şi $\frac{y+(-3)}{2} = 4$. Din $\frac{x+2}{2} = -1$ rezultă $x + 2 = -2$, de unde obţinem $x = -4$. Din $\frac{y+(-3)}{2} = 4$ rezultă $y + (-3) = 8$, de unde obţinem $y = 11$. Prin urmare, $E(-4, 11)$.

3. Reprezentaţi în sistemul de axe ortogonale xOy punctele $A(-3, 5)$, $B(-4, 0)$ şi $C(2, 0)$ şi apoi calculaţi aria triunghiului ABC.

Soluţie:

Observăm că $BC = |BO| + |OC| = |-4| + |2| = 4 + 2 = 6u$, iar înălţimea corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC este segmentul AD a cărui lungime reprezintă ordonata punctului A, prin urmare $AD = 5u$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{6u \cdot 5u}{2} = 15u^2$.



Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele propoziţii:

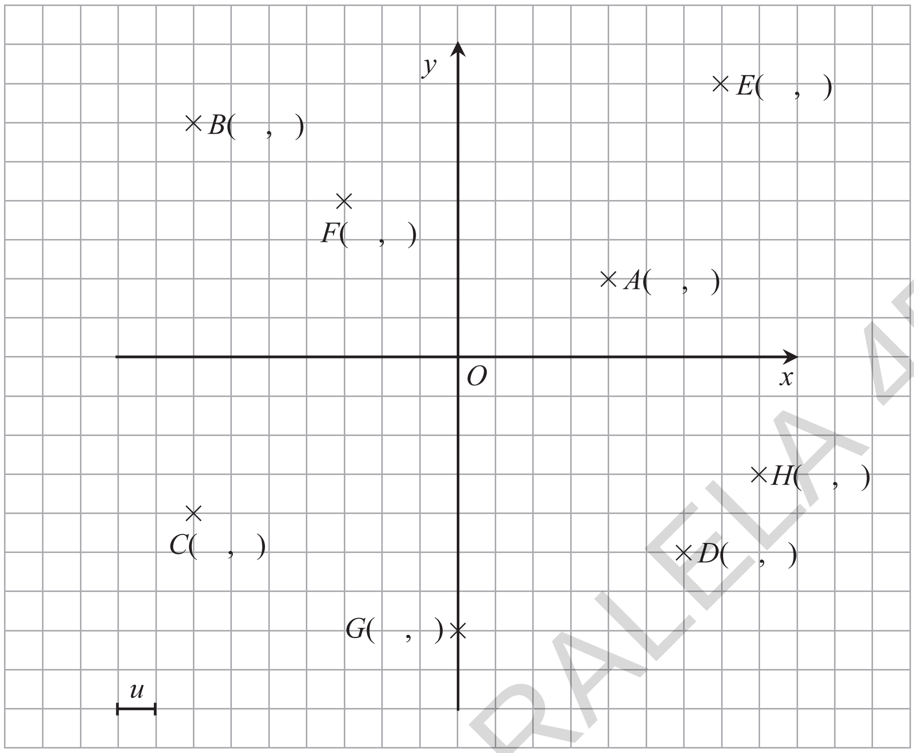
a) $A(2, \sqrt{5})$; b) $D(-7, 1)$; c) $G(4, -9)$; d) $E(-2, -3)$.

2. Numiţi ordonata şi abscisa pentru fiecare dintre punctele:

a) $M(0, \sqrt{2})$; b) $E(-1, 3)$; c) $B(7, \sqrt{6})$; d) $N(-2, -1)$.

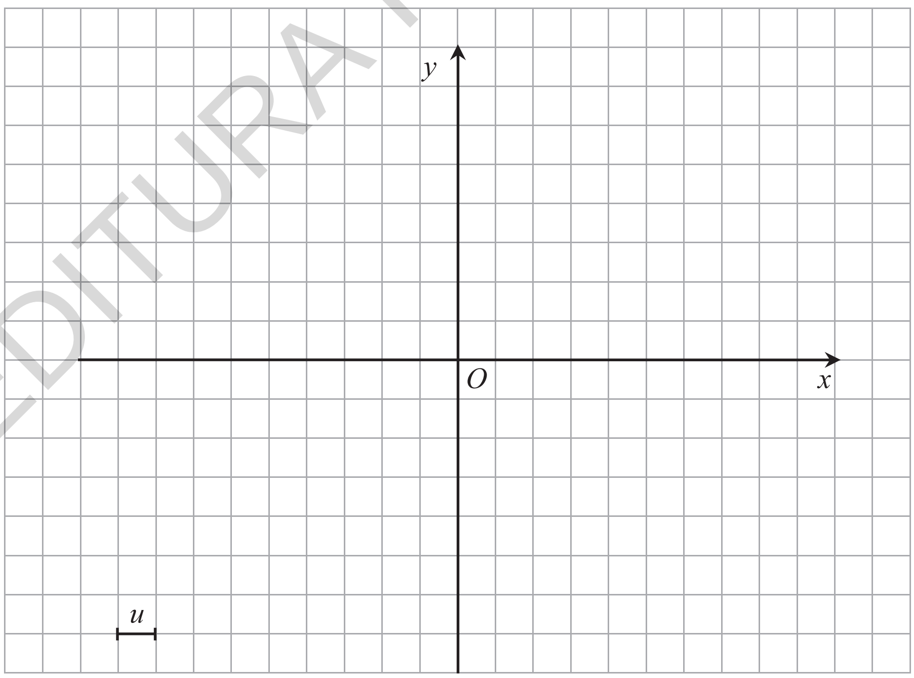
3. În figura următoare sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, F, G şi H în sistemul de axe ortogonale xOy. Completaţi parantezele cu coordonatele punctelor respective:

EDITURA PARALELA 45



4. Reprezentaţi în sistemul de axe ortogonale xOy punctele:

a) $A(2, 3)$; b) $B(3, 5)$; c) $C(-2, 4)$; d) $D(-5, 2)$;
e) $E(-6, -1)$; f) $F(-7, 6)$; g) $G(8, -4)$; h) $H(-4, -5)$.



EDITURA PARALELA 45

GEOMETRIE

Capitolul III

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecţia 1. Segmente proporţionale. Teorema paralelelor echidistante

Citesc şi reţin

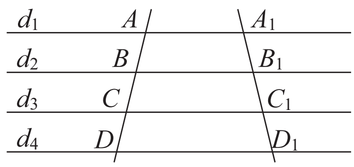
Definiţie: Raportul a două segmente este **raportul lungimilor** lor exprimate în aceleaşi unităţi de măsură.

Definiţie: Segmentele A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n şi E_1F_1, E_2F_2, …, E_nF_n se numesc **proporţionale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleaşi unităţi de măsură, formează şirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1}=\frac{A_2B_2}{E_2F_2}=\ldots=\frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.

$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$, $AB \equiv BC \equiv CD \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1B_1 \equiv B_1C_1 \equiv C_1D_1$.



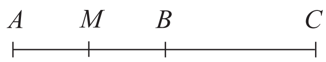
Cum se aplică?

1. Determinaţi raportul segmentelor AB şi EF cu lungimile de 4 cm, respectiv 140 mm.

Soluţie:

Exprimăm lungimea segmentului EF în centimetri: $EF = 140 \text{ mm} = 140 : 10 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$, deci $\frac{AB}{EF}=\frac{4\text{ cm}}{14\text{ cm}}=\frac{2}{7}$.

2. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B şi C, în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC$ şi notăm cu M mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele AM, MB, AB şi BC sunt proporţionale.



Soluţie:

Notăm $AB = 2x$, deci $BC = 2x$, $AM = x$ şi $MB = x$;

$\frac{AM}{AB}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{MB}{BC}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$, prin urmare $\frac{AM}{AB}=\frac{MB}{BC}$.

EDITURA PARALELA 45

3. Se consideră segmentul EF şi punctul D interior acestuia EF, astfel încât $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$.

Aflaţi rapoartele: $\frac{DF}{DE}$, $\frac{DE}{EF}$ şi $\frac{EF}{DF}$.

Soluţie:

Deoarece $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, rezultă că $\frac{DF}{DE} = \frac{5}{3}$. În continuare aplicăm proprietăţile proporţiilor derivate cu alţi termeni: $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE}{DE+DF} = \frac{3}{3+5}$, aşadar $\frac{DE}{EF} = \frac{3}{8}$; $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE+DF}{DF} = \frac{3+5}{5}$, aşadar $\frac{EF}{DF} = \frac{8}{5}$.

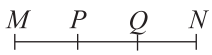
Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat segmentul EF şi punctul M, mijlocul acestuia. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\frac{EM}{EF} = \frac{1}{2}$; ☐ b) $\frac{EM}{MF} = 1$; ☐ c) $\frac{EF}{EM} = 2$; ☐ d) $\frac{FM}{FE} = \frac{1}{3}$. ☐

2. În figura alăturată este reprezentat segmentul MN şi punctele P şi Q interioare acestuia, astfel încât $MP \equiv PQ \equiv QN$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.



a) $\frac{MP}{MN} =$ .... ; b) $\frac{MQ}{MN} =$ .... ; c) $\frac{MQ}{PN} =$ .... ; d) $\frac{NQ}{NP} =$ ....

3. Determinaţi raportul segmentelor AB şi CD în următoarele cazuri:

a) $AB = 12$ cm şi $CD = 18$ cm; b) $AB = 36$ dm şi $CD = 24$ dm;
c) $AB = 32$ dm şi $CD = 40$ dm; d) $AB = 63$ cm şi $CD = 72$ cm.

c)

d)

4. În figura alăturată, pe dreapta d au fost construite punctele A, B, C, D şi E în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

a) $\frac{AB}{BE} =$ .... ; b) $\frac{AC}{BE} =$ .... ; c) $\frac{EA}{EB} =$ .... ; d) $\frac{DE}{DA} =$ ....

EDITURA PARALELA 45

5. Determinaţi raportul segmentelor AB şi CD în următoarele cazuri:

a) $AB = 15$ m şi $CD = 2,4$ dam; b) $AB = 28$ m şi $CD = 0,08$ hm;

c) $AB = 6$ dam şi $CD = 450$ dm; d) $AB = 72$ dm şi $CD = 450$ cm.

c)

6. Arătaţi că segmentele AB, CD, EF şi MN sunt proporţionale, ştiind că:

a) $AB = 12$ cm, $CD = 9$ cm, $EF = 28$ cm şi $MN = 21$ cm;

b) $AB = 8$ cm, $CD = 25$ cm, $EF = 20$ cm şi $MN = 10$ cm.

b)

EDITURA PARALELA 45

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

7. Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB şi cu P mijlocul segmentului AM, aflaţi rapoartele:

a) $\frac{AM}{AB}$; b) $\frac{AP}{AB}$; c) $\frac{PB}{AM}$; d) $\frac{AB}{PB}$.

8. Punctul C este mijlocul segmentului AB, iar punctul D este interior segmentului BC astfel încât $BC = 3BD$. Aflaţi:

a) $\frac{BD}{BC}$; b) $\frac{DC}{DA}$; c) $\frac{CD}{AB}$; d) $\frac{AB}{AD}$.

9. Punctul M este interior segmentului AB. Dacă:

a) $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{5}$, aflaţi $\frac{MB}{MA}, \frac{MA}{AB}, \frac{AB}{MB}$; b) $\frac{MA}{AB} = \frac{2}{7}$, aflaţi $\frac{AB}{AM}, \frac{MB}{MA}, \frac{MB}{AB}$.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele E_1, E_2 interioare laturii AB, astfel încât $AE_1 \equiv E_1E_2 \equiv E_2B$. Paralelele la dreapta BC, construite prin punctele E_1 şi E_2, intersectează latura AC în punctele F_1, respectiv F_2. Ştiind că $AF_1 = 7,5$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

11. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B, C şi D, în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD$ şi notăm cu M mijlocul segmentului AB. Arătaţi că:

a) segmentele AB, MB, AD şi MC sunt proporţionale;

b) segmentele DB, DA, BC şi MC sunt proporţionale.

12. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, şi punctele M_1, M_2, M_3 interioare laturii AD, astfel încât $AM_1 \equiv M_1M_2 \equiv M_2M_3 \equiv M_3D$. Paralelele la dreapta AB, construite prin punctele M_1, M_2 şi M_3, intersectează latura BC în punctele N_1, N_2, respectiv N_3. Dacă $AD = 16$ cm şi $BC = 20$ cm, calculaţi lungimile segmentelor:

a) AM_1, M_1M_2, M_2M_3 şi M_3D; b) BN_1, N_1N_2, N_2N_3 şi N_3C.

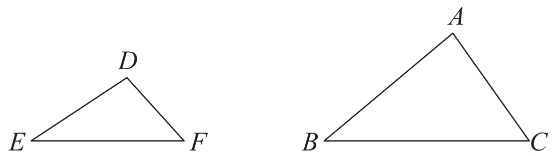
Lecția 4. Triunghiuri asemenea

Citesc și rețin

Definiție: Triunghiurile *DEF* și *ABC* se numesc **triunghiuri asemenea** dacă:

$$\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A,\ \sphericalangle E \equiv \sphericalangle B,\ \sphericalangle F \equiv \sphericalangle C \text{ și } \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA}.$$

Notăm $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ și citim: triunghiul *DEF* este asemenea cu triunghiul *ABC*.



Definiție: Dacă $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, atunci oricare dintre rapoartele $\frac{DE}{AB}, \frac{EF}{BC}, \frac{FD}{CA}$ se numește **raportul de asemănare** a celor două triunghiuri.

Teoremă: Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \sim \Delta DEF \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = k^2$$

Cum se aplică?

1. Știind că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, $\sphericalangle D = 43°$ și $\sphericalangle E = 62°$, determinați $\sphericalangle C$.

Soluție:

Deoarece $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, rezultă că $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$. În triunghiul *DEF* avem: $\sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F = 180°$, deci $43° + 62° + \sphericalangle F = 180°$, de unde rezultă că $\sphericalangle F = 75°$, prin urmare $\sphericalangle C = 75°$.

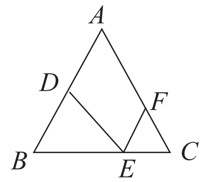
2. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{3}$. Știind că $DE = 14$ cm, $EF = 18$ cm și $FD = 22$ cm, calculați *AB*, *BC* și *CA*.

Soluție:

Deoarece $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, rezultă că $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = \frac{2}{3}$; $\frac{DE}{AB} = \frac{2}{3}$, deci $\frac{14\text{ cm}}{AB} = \frac{2}{3}$, de unde rezultă că $AB = 21$ cm. Analog se arată că $BC = 27$ cm și $CA = 33$ cm.

EDITURA PARALELA 45

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele D, E şi F situate pe laturile AB, BC, respectiv CA. Dacă $\Delta DBE \sim \Delta ECF$, determinaţi măsura unghiului DEF.



Soluţie:

$\Delta DBE \sim \Delta ECF$, deci $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CEF$ şi, deoarece $\sphericalangle BDE + \sphericalangle BED = 120°$, rezultă că $\sphericalangle CEF + \sphericalangle BED = 120°$, prin urmare $\sphericalangle DEF = 180° - 120°$ şi obţinem $\sphericalangle DEF = 60°$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $\Delta MNP \sim \Delta DEF$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle D$; ☐ b) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle F$; ☐ c) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle E$; ☐ d) $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle F$. ☐

2. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$; ☐ b) $\frac{AB}{MN} = \frac{NP}{BC} = \frac{CA}{PM}$; ☐ c) $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA}$. ☐

3. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Ştiind că:

a) $\sphericalangle A = 39°$ şi $\sphericalangle B = 73°$, aflaţi măsura unghiului F;

b) $\sphericalangle D = 27°$ şi $\sphericalangle F = 62°$, aflaţi măsura unghiului B.

b)

4. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Ştiind că:

a) $\sphericalangle A = 35°$ şi $\sphericalangle E = 75°$, aflaţi măsura unghiului F;

b) $\sphericalangle B = 40°$ şi $\sphericalangle F = 53°$, aflaţi măsura unghiului A.

b)

5. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: Dacă $\Delta MNP \sim \Delta QRT$, raportul lor de asemănare fiind egal cu 1, atunci $\Delta MNP \equiv \Delta QRT$. ☐

EDITURA PARALELA 45

6. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{2}{3}$. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Raportul $\frac{\mathscr{A}_{DEF}}{\mathscr{A}_{MNP}}$ este egal cu:

A. $\frac{2}{3}$; B. $\frac{4}{6}$; C. $\frac{6}{9}$; D. $\frac{4}{9}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

7. Se consideră $\Delta MNP \sim \Delta ABC$. Știind că:

a) $\frac{\mathscr{A}_{MNP}}{\mathscr{A}_{ABC}} = \frac{25}{36}$, aflați $\frac{MN}{AB}$; b) $\frac{\mathscr{A}_{MNP}}{\mathscr{A}_{ABC}} = \frac{16}{49}$, aflați $\frac{NP}{BC}$.

8. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{5}$.

a) Dacă $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm și $CA = 20$ cm, aflați DE, EF și FD.
b) Dacă $DE = 10$ cm, $EF = 14$ cm și $FD = 22$ cm, aflați AB, BC și CA.

9. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{4}{5}$. Știind că:

a) $\mathscr{A}_{ABC} = 64$ cm^2, calculați $\mathscr{A}_{DEF}$; b) $\mathscr{A}_{DEF} = 75$ cm^2, calculați $\mathscr{A}_{ABC}$.

10. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta MNP$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{5}{7}$. Dacă:

a) $\mathscr{P}_{DEF} = 65$ cm, aflați $\mathscr{P}_{MNP}$; b) $\mathscr{P}_{MNP} = 63$ cm, aflați $\mathscr{P}_{DEF}$.

11. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Știind că:
a) $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 10$ cm și $\mathscr{P}_{DEF} = 75$ cm, calculați DE, EF și FD;
b) $DE = 7$ cm, $EF = 9$ cm, $FD = 12$ cm și $\mathscr{P}_{ABC} = 70$ cm, calculați AB, BC și CA.

12. În triunghiul ABC, notăm cu M, N și P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

13. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E și F situate pe laturile AB, BC, respectiv CA. Știind că $\Delta DBE \sim \Delta FEC$, arătați că patrulaterul $ADEF$ este paralelogram.

14. Știind că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ și $\Delta DEF \sim \Delta MNP$, arătați că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

15. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctele E și F situate pe laturile AB, respectiv BC. Dacă $\Delta DAE \sim \Delta EBF$, determinați măsura unghiului DEF.

16. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$ și punctele D și E situate pe laturile NP, respectiv PQ. Dacă $\Delta MND \sim \Delta NPE$, arătați că $MD \perp NE$.

EDITURA PARALELA 45

17. În triunghiul ABC, construim înălţimea AD, D este interior laturii BC. Ştiind că $\Delta DAB \sim \Delta DCA$, arătaţi că:

a) $AD^2 = BD \cdot CD$; b) $\sphericalangle BAC = 90°$.

18. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$, bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în punctul D. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta BDC$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

19. Se consideră triunghiul obtuzunghic ABC cu $AB \equiv AC$. Perpendiculara construită în A pe dreapta AB intersectează latura BC în punctul D. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta DCA$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

20. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, arătaţi că $AB(EF + FD) = DE(BC + CA)$, $BC(FD + DE) = EF(CA + AB)$ şi $CA(DE + EF) = FD(AB + BC)$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului DEF, ştiind că $\Delta DEF \sim \Delta EFD$.

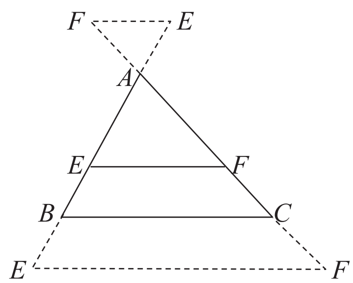
(3p) **2.** Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{3}{5}$. Ştiind că $MN = 15$ cm, $NP = 20$ cm şi $PM = 25$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

(3p) **3.** Se consideră triunghiul obtuzunghic ABC cu $AB \equiv AC$ şi punctul D situat pe latura BC, astfel încât $CA \equiv CD$. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Lecţia 5. Teorema fundamentală a asemănării

Citesc şi reţin

Teorema fundamentală a asemănării: O paralelă construită la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi ale triunghiului (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu triunghiul dat.



$EF \parallel BC \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$

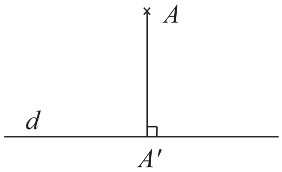
EDITURA PARALELA 45

Capitolul IV
RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă

Citesc și rețin

Definiție: Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei construite din acel punct pe dreapta respectivă.



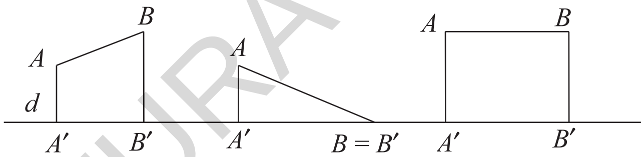
Notăm $\text{pr}_d A = A'$.

Teoremă:

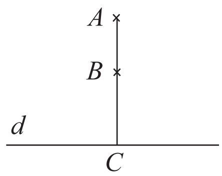
Proiecția unui segment pe o dreaptă este:

– un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe dreapta respectivă;

– un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe dreapta respectivă.



Notăm $\text{pr}_d AB = A'B'$

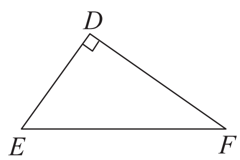


$\text{pr}_d AB = C$

Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul DEF cu $\measuredangle D = 90°$ din figura alăturată. Alegeți răspunsul corect:

A. $\text{pr}_{DE} F = E$;   B. $\text{pr}_{DE} F = D$.



Soluție:

Deoarece $FD \perp DE$, rezultă că răspunsul corect este B, $\text{pr}_{DE} F = D$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Determinați:

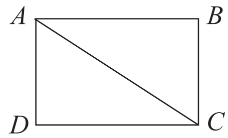
a) $\text{pr}_{DC} AB$;   b) $\text{pr}_{AD} AC$.

EDITURA PARALELA 45

Soluţie:

a) Cum $pr_{DC}\,A = D$ şi $pr_{DC}\,B = C$, rezultă că $pr_{DC}\,AB = DC$;

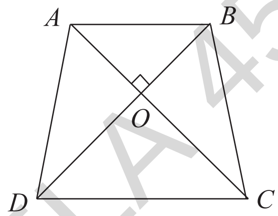
b) Cum $pr_{AD}\,A = A$ şi $pr_{AD}\,C = D$, rezultă că $pr_{AD}\,AC = AD$.



3. Trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are diagonalele perpendiculare. Ştiind că $pr_{AC}\,AD$ şi $pr_{BD}\,BC$ sunt segmente congruente, arătaţi că trapezul $ABCD$ este isoscel.

Soluţie:

$AC \cap BD = \{O\}$. Observăm că $pr_{AC}\,AD = AO$ şi $pr_{BD}\,BC = BO$, deci $AO \equiv BO$. Deoarece $AB \parallel CD$, aplicând teorema lui Thales, rezultă că $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BO}{BD}$, prin urmare $AC \equiv BD$, de unde deducem că trapezul $ABCD$ este isoscel.



Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele propoziţii:

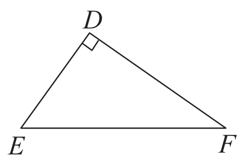
a) $pr_{BC}\,E = F$; b) $pr_{a}\,M = N$; c) $pr_{EF}\,D = P$.

2. Citiţi următoarele propoziţii:

a) $pr_{AB}\,EF = MN$; b) $pr_{a}\,CD = M$; c) $pr_{EF}\,MN = PQ$.

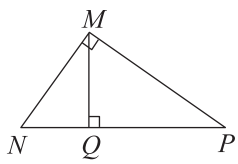
3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF cu $\measuredangle D = 90°$. Alegeţi răspunsul corect încercuind litera corespunzătoare acestuia:

A. $pr_{DF}\,E = F$; B. $pr_{DF}\,E = D$.



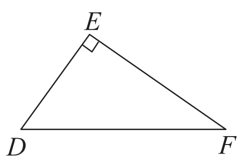
4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul MNP cu $\measuredangle M = 90°$ şi înălţimea MQ, $Q \in NP$. Alegeţi răspunsul corect încercuind litera corespunzătoare acestuia:

A. $pr_{NP}\,M = N$;
B. $pr_{NP}\,M = P$;
C. $pr_{NP}\,M = Q$.



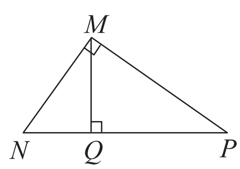
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF cu $\measuredangle E = 90°$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $pr_{EF}\,DE = E$; ☐ b) $pr_{ED}\,FE = E$. ☐



6. În figura alăturată este reprezentat triunghiul MNP cu $\measuredangle M = 90°$ şi înălţimea MQ, $Q \in NP$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

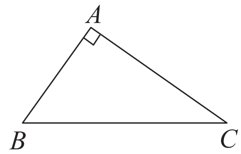
a) $pr_{NP}\,MN = NQ$; ☐
b) $pr_{NP}\,MP = NP$; ☐
c) $pr_{NP}\,MP = QP$. ☐



EDITURA PARALELA 45

7. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

a) $pr_{AC} BC = ...$; b) $pr_{AB} BC = ...$.



Exerciţii şi probleme de dificultate medie

8. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $\sphericalangle A = 90°$. Determinaţi:

a) $pr_{AD} B$; b) $pr_{DC} A$; c) $pr_{AD} C$;
d) $pr_{AD} CD$; e) $pr_{AB} DA$; f) $pr_{AD} BC$.

9. Se consideră pătratul $ABCD$. Determinaţi:

a) $pr_{BC} A$; b) $pr_{CD} B$; c) $pr_{AC} D$;
d) $pr_{BD} AB$; e) $pr_{AC} AD$; f) $pr_{BC} DC$.

10. Se consideră rombul $ABCD$. Determinaţi:

a) $pr_{AC} B$; b) $pr_{BD} C$; c) $pr_{AC} D$;
d) $pr_{AC} AB$; e) $pr_{BD} CD$; f) $pr_{AC} BC$.

11. Calculaţi aria rombului $ABCD$, ştiind că $pr_{AC} AB$ şi $pr_{BD} BC$ au lungimile egale cu $3\sqrt{6}$ cm, respectiv $2\sqrt{3}$ cm.

12. Se consideră rombul $DEFG$. Ştiind că $pr_{DF} DE$ şi $pr_{EG} DE$ sunt segmente congruente, arătaţi că $DEFG$ este pătrat.

13. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ şi o dreaptă d ce trece prin punctul A şi este situată în exteriorul triunghiului. Dacă notăm cu D proiecţia punctului A pe dreapta BC, iar cu E şi F notăm proiecţiile punctelor B, respectiv C pe dreapta d, arătaţi că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

14. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$ şi $AC \perp BD$. Dacă $pr_{DC} AC$ şi $pr_{AB} BD$ au lungimile egale cu $6\sqrt{3}$ cm, respectiv $2\sqrt{6}$ cm, calculaţi AD.

15. În interiorul unghiului AOB cu măsura de $60°$ considerăm segmentul CD, astfel încât proiecţiile segmentelor OC şi OD pe dreptele OA, respectiv OB sunt segmente congruente. Arătaţi că $d(C, OA) + d(D, OB) = CD$ dacă şi numai dacă $\sphericalangle COD = 30°$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Trapezul $DEFG$ cu $DE \parallel FG$ are diagonalele perpendiculare. Determinaţi:

a) $pr_{DF} GF$; b) $pr_{EG} D$; c) $pr_{EG} EF$.

EDITURA PARALELA 45

25. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, R)$. Dacă notăm cu R_1, R_2 şi R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor OAB, OBC, respectiv OCA, arătaţi că:

$$R \leq \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}.$$ (I. Tudor)

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălţimea AD, $D \in BC$. Ştiind că $BD = 9$ cm şi $CD = 16$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

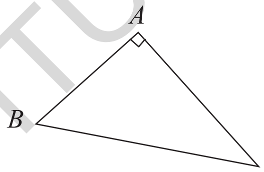
(3p) **2.** Din punctul A exterior cercului $\mathscr{C}(O, 6 \text{ cm})$ construim tangentele AB şi AC, $B, C \in \mathscr{C}(O, 6 \text{ cm})$. Ştiind că $AO = 12$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

(3p) **3.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor rombului $ABCD$, cu $\sphericalangle A < 90°$. Perpendiculara construită în punctul B pe latura BC intersectează diagonala AC în punctul E. Ştiind că lungimile segmentelor AE, EO şi OC, exprimate în centimetri, sunt trei numere naturale consecutive de aceeaşi paritate, calculaţi $\mathscr{P}_{ABCD}$.

Lecţia 10. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

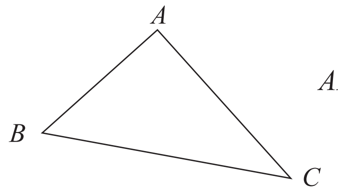
Citesc şi reţin

Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.



$$\sphericalangle A = 90° \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Reciproca teoremei lui Pitagora: Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci unghiul care se opune acestei laturi este drept.



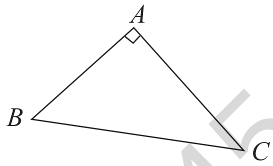
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \sphericalangle A = 90°$$

EDITURA PARALELA 45

Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$. Ştiind că $AB = 12$ cm şi $AC = 16$ cm, calculaţi BC.

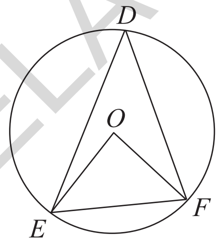
Soluţie:



Aplicăm teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci $BC^2 = 12^2 + 16^2$ sau $BC^2 = 144 + 256$, aşadar $BC^2 = 400$, de unde rezultă că $BC = \sqrt{400}$ cm şi obţinem $BC = 20$ cm.

2. Triunghiul ascuţitunghic DEF este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, 3\sqrt{2}$ cm$)$. Ştiind că $EF = 6$ cm, determinaţi $\sphericalangle EDF$.

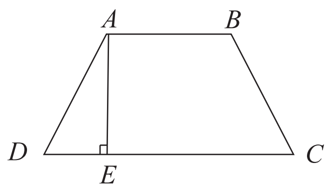
Soluţie:



În triunghiul OEF, observăm că $EF^2 = 36$, iar $OE^2 + OF^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 + 18 = 36$, prin urmare $EF^2 = OE^2 + OF^2$, de unde rezultă că $\sphericalangle EOF = 90°$, deci $\overset{\frown}{EF} = 90°$; $\sphericalangle EDF = \dfrac{\overset{\frown}{EF}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ construim înălţimea AE, $E \in CD$. Ştiind că $AB = 7$ cm, $CD = 19$ cm şi $AE = 8$ cm, calculaţi perimetrul trapezului $ABCD$.

Soluţie:



Deoarece $ABCD$ este trapez isoscel rezultă că $DE = \dfrac{CD - AB}{2}$, aşadar $DE = \dfrac{19\text{ cm} - 7\text{ cm}}{2}$, de unde obţinem $DE = 6$ cm. În ΔAED, aplicăm teorema lui Pitagora: $AD^2 = AE^2 + ED^2$, deci $AD^2 = 8^2 + 6^2$ sau $AD^2 = 100$, prin urmare $AD = \sqrt{100}$, de unde rezultă că $AD = 10$ cm, deci $BC = 10$ cm.

$\mathscr{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 7\text{ cm} + 10\text{ cm} + 19\text{ cm} + 10\text{ cm} = 46$ cm.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Construiţi triunghiul MNP cu $\sphericalangle N = 90°$ şi apoi stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

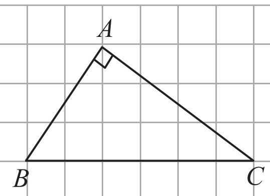
a) $MN^2 = NP^2 + PM^2$; ☐ b) $NP^2 = PM^2 + MN^2$; ☐ c) $PM^2 = MN^2 + NP^2$. ☐

EDITURA PARALELA 45

2. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$. Calculaţi BC în următoarele cazuri:

a) $AB = 3$ cm şi $AC = 4$ cm;
b) $AB = 8$ cm şi $AC = 6$ cm;
c) $AB = 5$ cm şi $AC = 12$ cm;
d) $AB = 12$ cm şi $AC = 9$ cm;
e) $AB = 2\sqrt{5}$ cm şi $AC = 4$ cm;
f) $AB = 6$ cm şi $AC = 3\sqrt{3}$ cm.

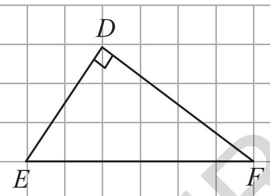
e)



3. Se consideră triunghiul DEF cu $\sphericalangle D = 90°$. Ştiind că:

a) $DE = 12$ cm şi $EF = 20$ cm, aflaţi DF;
b) $EF = 26$ cm şi $DF = 10$ cm, aflaţi DE;
c) $DE = 4\sqrt{3}$ cm şi $EF = 6\sqrt{2}$ cm, aflaţi DF;
d) $EF = 4\sqrt{5}$ cm şi $DF = 2\sqrt{2}$ cm, aflaţi DE.

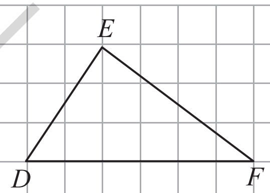
c)



4. Se consideră triunghiul DEF.

a) Ştiind că $DE = 12$ cm, $EF = 15$ cm şi $FD = 9$ cm, aflaţi $\sphericalangle D$.
b) Ştiind că $DE = 13$ cm, $EF = 5$ cm şi $FD = 12$ cm, aflaţi $\sphericalangle F$.
c) Ştiind că $DE = 6$ cm, $EF = 2\sqrt{7}$ cm şi $FD = 8$ cm, aflaţi $\sphericalangle E$.

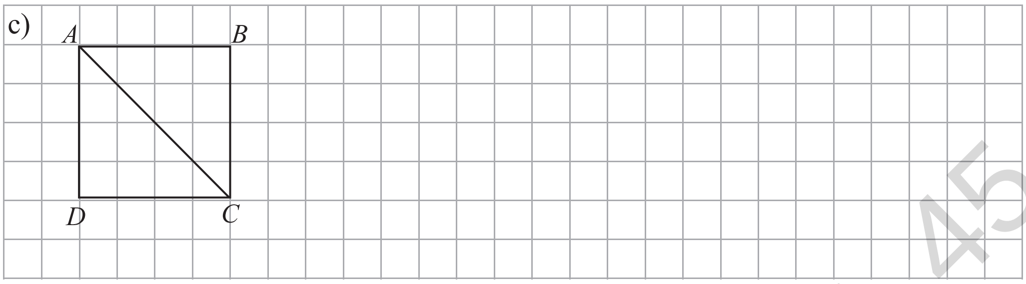
c)



EDITURA PARALELA 45

5. Notăm cu d lungimea diagonalei pătratului $ABCD$. Calculați d, știind că pătratul are latura de:

a) 5 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm; c) $7\sqrt{2}$ cm; d) a cm.

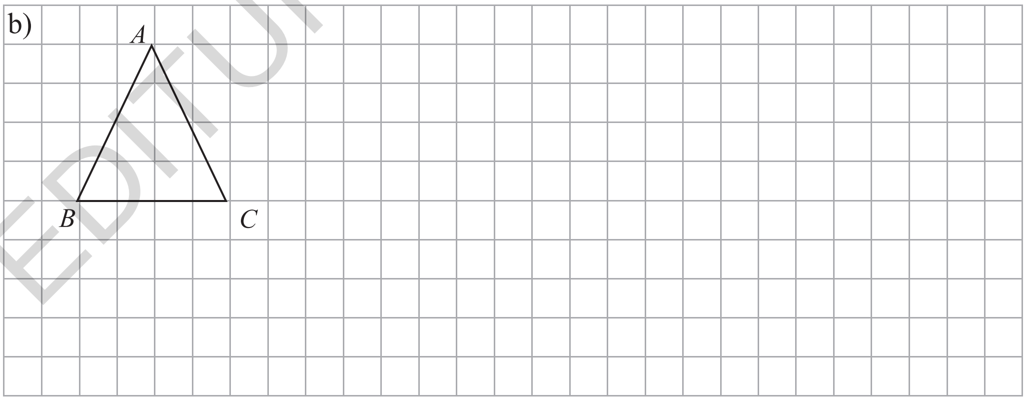


6. În triunghiul echilateral ABC notăm cu h lungimea înălțimii BE, $E \in AC$. Calculați h, știind că latura triunghiului echilateral ABC este de:

a) 8 cm; b) $4\sqrt{3}$ cm; c) $6\sqrt{6}$ cm; d) a cm.

7. Calculați aria triunghiului ABC în următoarele cazuri:

a) $AB = AC = 13$ cm și $BC = 10$ cm; b) $BA = BC = 15$ cm și $AC = 18$ cm.

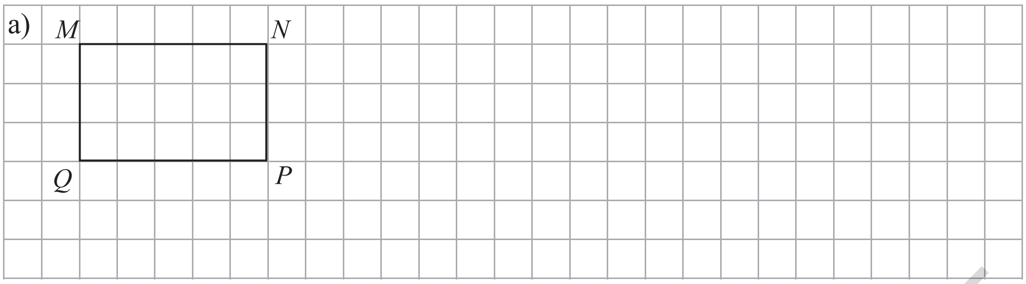


8. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$. Știind că:

a) $MN = 4\sqrt{2}$ cm și $NP = 2$ cm, calculați MP;

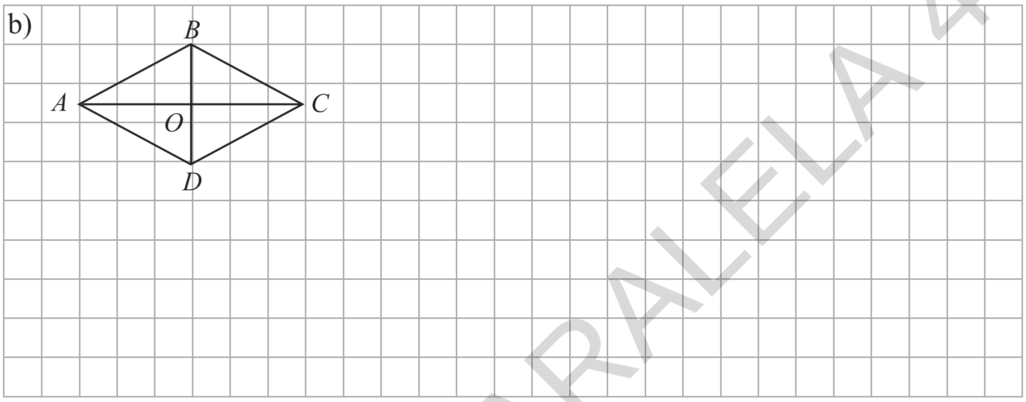
b) $NP = 1$ cm și $PQ = 4\sqrt{3}$ cm, calculați NQ.

EDITURA PARALELA 45



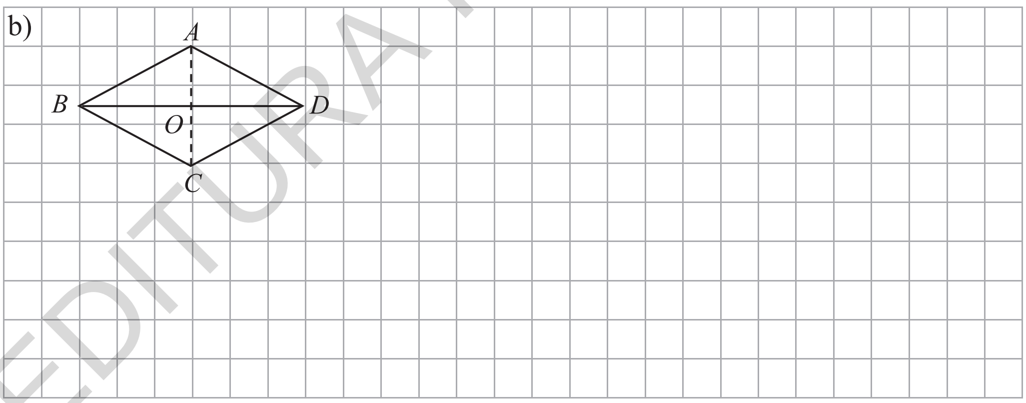
9. Calculaţi perimetrul rombului $ABCD$ în următoarele cazuri:

a) $AC = 12$ cm şi $BD = 16$ cm; b) $AC = 24$ cm şi $BD = 18$ cm.



10. Se consideră rombul $ABCD$ cu perimetrul de 52 cm. Calculaţi aria rombului $ABCD$, ştiind că:

a) $AC = 24$ cm; b) $BD = 8\sqrt{3}$ cm.



Exerciţii şi probleme de dificultate medie

11. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 10 \text{ cm})$ considerăm punctele E şi F. Calculaţi aria triunghiului OEF în următoarele cazuri:

a) $d(O, EF) = 6$ cm; b) $d(O, EF) = 5$ cm.

12. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ considerăm punctele A şi B. Aflaţi R în următoarele cazuri:

a) $AB = 16$ cm şi $d(O, AB) = 6$ cm; b) $AB = 24$ cm şi $d(O, AB) = 5$ cm.

EDITURA PARALELA 45

13. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$ şi $DB \perp BC$. Ştiind că $AB = 4$ cm şi $BD = 4\sqrt{3}$ cm, calculaţi:

a) AD; b) CD; c) BC.

14. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Ştiind că $\mathcal{A}_{ABCD} = 132$ cm^2, $AB = 2$ cm şi $CD = 20$ cm, calculaţi:

a) înălţimea trapezului $ABCD$; b) perimetrul trapezului $ABCD$.

15. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$.

a) Dacă $MN = 6\sqrt{2}$ cm şi $NP = 2\sqrt{6}$ cm, calculaţi d(N, MP).

b) Dacă $MN = 5\sqrt{6}$ cm şi $MQ = 5\sqrt{3}$ cm, calculaţi d(M, NQ).

16. Triunghiul ascuţitunghic DEF cu $\sphericalangle D = 45°$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Ştiind că:

a) $R = 7$ cm, calculaţi EF; b) $EF = 8$ cm, calculaţi R.

17. Din punctul D situat în exteriorul cercului $\mathcal{C}(O,\ 3\sqrt{2}$ cm) construim tangentele DE şi DF, E, $F \in \mathcal{C}(O,\ 3\sqrt{2}$ cm), iar $DO \cap EF = \{M\}$. Ştiind că $MO = \sqrt{6}$ cm, calculaţi $\mathcal{P}_{DEF}$.

18. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Ştiind că $\mathcal{P}_{ABCD} = 58$ cm, $AB = 11$ cm şi $CD = 21$ cm, calculaţi aria trapezului $ABCD$.

19. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 20$ cm şi $BC = 15$ cm, notăm cu E şi F proiecţiile punctelor B, respectiv D pe diagonala AC. Calculaţi lungimea segmentului EF.

20. În triunghiul ABC cu $AB = AC = 25$ cm şi $BC = 30$ cm, construim înălţimea BD, $D \in AC$. Calculaţi perimetrul triunghiului ABD.

21. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ şi punctul M interior laturii BC, astfel încât $BM - CM = 3$ cm. Ştiind că $AB = 15$ cm şi $AC = 20$ cm, calculaţi lungimea segmentului AM.

22. Triunghiul ascuţitunghic ABC cu $AB \equiv AC$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Calculaţi $\mathcal{A}_{ABC}$, ştiind că:

a) $R = 10$ cm şi $BC = 12$ cm; b) $R = 15$ cm şi $BC = 18$ cm.

23. Cercul $\mathcal{C}(I, r)$ este înscris în triunghiul ABC. Calculaţi raza cercului, r, ştiind că:

a) $AB = AC = 25$ cm şi $BC = 30$ cm; b) $AB = AC = 26$ cm şi $BC = 20$ cm.

24. În dreptunghiul $ABCD$, notăm cu E proiecţia punctului A pe diagonala BD. Ştiind că $AB = 4\sqrt{3}$ cm şi $BC = 4$ cm, calculaţi lungimea segmentului EC.

25. În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ şi $AB < CD$, construim înălţimea AE, $E \in CD$ şi diagonala BD, $AE \cap BD = \{F\}$. Ştiind că $AB = 6\sqrt{5}$ cm, $BC = 10$ cm şi $CD = 10\sqrt{5}$ cm, calculaţi $\mathcal{A}_{BCF}$.

26. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor rombului $ABCD$, cu $\sphericalangle BAD = 60°$ şi latura de 6 cm. Dacă perpendiculara construită din punctul O pe latura AD intersectează dreapta CD în punctul E, calculaţi BE.

27. În triunghiul ascţitunghic ABC, cu $AB \equiv AC$, notăm cu M mijlocul laturii BC şi construim înălţimea BD, $D \in AC$. $AM \cap BD = \{H\}$. Ştiind că $AM = 2\sqrt{6}$ cm şi $BD = 4\sqrt{2}$ cm, calculaţi:

a) $\mathcal{A}_{ABC}$; b) $\mathcal{A}_{ABH}$.

EDITURA PARALELA 45

Lecția 11. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Citesc și rețin

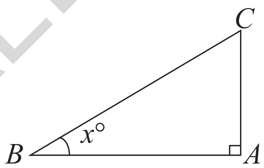
Definiții:

Într-un triunghi dreptunghic considerăm un unghi ascuțit cu măsura de $x°$ și numim:

- **sinus de $x°$**, notat **sin $x°$**, raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea ipotenuzei;
- **cosinus de $x°$**, notat **cos $x°$**, raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea ipotenuzei;
- **tangentă de $x°$**, notată **tg $x°$**, raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate;
- **cotangentă de $x°$**, notată **ctg $x°$**, raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse.

$\sin x° = \dfrac{AC}{BC}$, $\cos x° = \dfrac{AB}{BC}$,

$\operatorname{tg} x° = \dfrac{AC}{AB}$, $\operatorname{ctg} x° = \dfrac{AB}{AC}$.



Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta se numesc **funcții trigonometrice**.

Proprietățile funcțiilor trigonometrice:

1. $\sin x° = \cos (90° - x°)$, $\cos x° = \sin (90° - x°)$,
$\operatorname{tg} x° = \operatorname{ctg} (90° - x°)$, $\operatorname{ctg} x° = \operatorname{tg} (90° - x°)$;

2. $\sin x° < 1$, $\cos x° < 1$;

3. $\sin^2 x° + \cos^2 x° = 1$.

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile cu măsura de 30°, 45° și 60°:

	sin	**cos**	**tg**	**ctg**
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

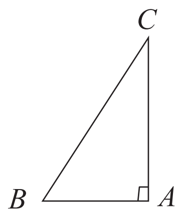
Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm și $CA = 4$ cm. Calculați:

a) $\sin B$; b) $\cos B$; c) $\operatorname{tg} C$; d) $\operatorname{ctg} C$.

EDITURA PARALELA 45

Soluţie:



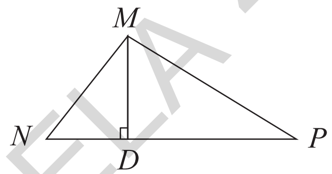
a) $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}8$; b) $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}6$;

c) $\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}75$; d) $\operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB} = \frac{4\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 1{,}(3)$.

2. În triunghiul MNP, construim înălţimea MD, D interior laturii NP. Ştiind că $MD = 6$ cm, $ND = 2\sqrt{3}$ cm şi $MP = 6\sqrt{2}$ cm, determinaţi:

a) $\sphericalangle MNP$; b) $\sphericalangle MPN$; c) $\sphericalangle NMP$.

Soluţie:



a) În ΔMDN cu $\sphericalangle D = 90°$, avem $\operatorname{tg} N = \frac{MD}{ND}$, deci $\operatorname{tg} N = \frac{6\text{ cm}}{2\sqrt{3}\text{ cm}} \overset{\sqrt{3})}{=} \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3}$, aşadar $\operatorname{tg} N = \sqrt{3}$, de unde rezultă $\sphericalangle MNP = 60°$;

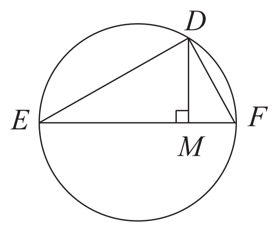
b) În ΔMDP cu $\sphericalangle D = 90°$, avem $\sin P = \frac{MD}{MP}$, deci $\sin P = \frac{6\text{ cm}}{6\sqrt{2}\text{ cm}} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, aşadar $\sin P = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă că $\sphericalangle MPN = 45°$;

c) $\sphericalangle NMP = 180° - \sphericalangle MNP - \sphericalangle MPN = 180° - 60° - 45° = 75°$.

3. Pe cercul $\mathscr{C}(O,\ 2\sqrt{6}\text{ cm})$ se consideră punctele D, E şi F, astfel încât segmentul EF este diametru şi $\overset{\frown}{DE} = 2\overset{\frown}{DF}$. Calculaţi:

a) $\mathscr{A}_{DEF}$; b) d(D, EF).

Soluţie:



a) $\sphericalangle EDF = \frac{180°}{2} = 90°$; $\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{DF} = 180°$ sau $2\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{DF} = 180°$, deci $3\overset{\frown}{DF} = 180°$, de unde rezultă că $\overset{\frown}{DF} = 180° : 3 = 60°$, deci $\sphericalangle DEF = 30°$. În ΔDEF cu $\sphericalangle D = 90°$, avem: $\sin E = \frac{DF}{EF}$ sau $\sin 30° = \frac{DF}{4\sqrt{6}}$, deci $\frac{1}{2} = \frac{DF}{4\sqrt{6}}$, de unde rezultă că $DF = 2\sqrt{6}$ cm; $\operatorname{tg} E = \frac{DF}{DE}$ sau $\operatorname{tg} 30° = \frac{2\sqrt{6}}{DE}$, deci $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{DE}$, de unde rezultă că $DE = 6\sqrt{2}$ cm; $\mathscr{A}_{DEF} = \frac{DE \cdot DF}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}}{2} = 12\sqrt{3}\text{ cm}^2$;

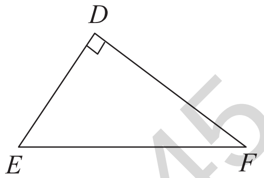
b) Construim $DM \perp EF$, $M \in EF$. În ΔDEM cu $\sphericalangle M = 90°$, avem: $\sin E = \frac{DM}{DE}$ sau $\sin 30° = \frac{DM}{6\sqrt{2}}$, deci $\frac{1}{2} = \frac{DM}{6\sqrt{2}}$, de unde rezultă că $DM = 3\sqrt{2}$ cm.

EDITURA PARALELA 45

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF, cu $\sphericalangle D = 90°$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

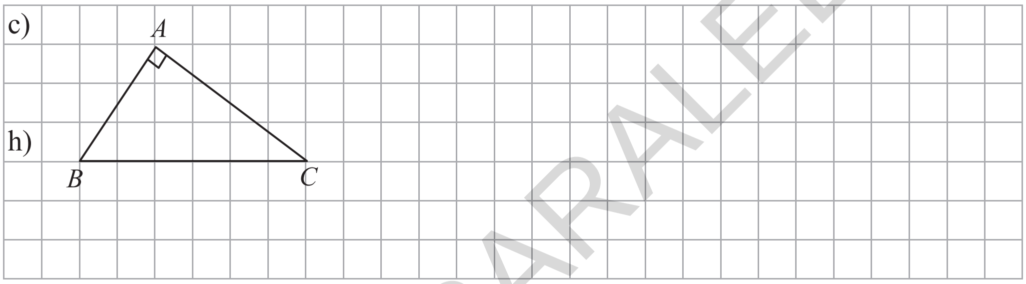


a) $\cos E = \dfrac{DE}{EF}$; $\square$ b) $\operatorname{tg} F = \dfrac{DF}{DE}$; $\square$ c) $\sin F = \dfrac{DF}{EF}$; $\square$

d) $\sin E = \dfrac{DF}{EF}$; $\square$ e) $\operatorname{ctg} F = \dfrac{DF}{EF}$; $\square$ f) $\cos F = \dfrac{DF}{DE}$. $\square$

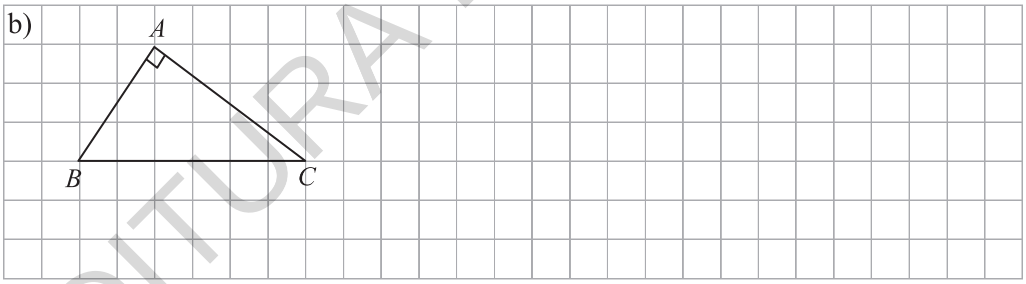
2. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm şi $CA = 8$ cm. Calculaţi:

a) $\sin B$; b) $\sin C$; c) $\cos B$; d) $\cos C$;
e) $\operatorname{ctg} B$; f) $\operatorname{tg} C$; g) $\operatorname{tg} B$; h) $\operatorname{ctg} C$.



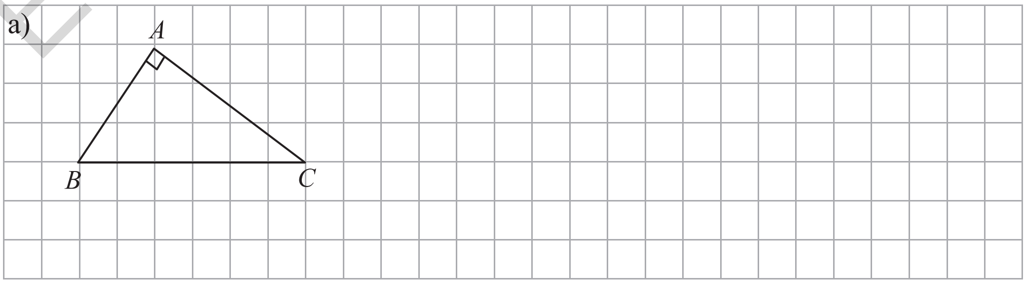
3. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sin B = 0{,}25$. Ştiind că:

a) $AC = 10$ cm, calculaţi BC; b) $BC = 12$ cm, calculaţi AC.



4. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $\cos B = 0{,}75$. Ştiind că:

a) $AB = 21$ cm, calculaţi BC; b) $BC = 24$ cm, calculaţi AB.



EDITURA PARALELA 45

Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

Capitolele: Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare, Elemente de organizare a datelor, Asemănarea triunghiurilor, Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Dacă reprezentăm punctul $A(-3, -5)$ în sistemul de axe ortogonale xOy, atunci acesta este situat în cadranul:
A. I; B. II; C. III; D. IV.

(7p) **2.** Soluţia ecuaţiei $\sqrt{7x+1} = 8$, unde $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:
A. 3; B. $\sqrt{7}$; C. $\sqrt{5}$; D. 4.

(7p) **3.** Se consideră mulţimile $E = \{a, b\}$ şi $F = \{c\}$. Mulţimea $E \times F$ este egală cu:
A. $\{(a, c), (b, c)\}$; B. $\{(a, b), (a, c)\}$; C. $\{(c, a), (c, b)\}$; D. $\{(c, b), (a, b)\}$.

(7p) **4.** Între mulţimile $A = \{-1, 2\}$ şi $B = \{-1, -4\}$ se stabileşte o dependenţă funcţională aplicând regula:
A. $x \to 2x$; B. $x \to (-x)^2$; C. $x \to -x^2$; D. $x \to 3x$.

(7p) **5.** Se consideră triunghiul DEF cu $\sphericalangle D = 90°$. Dacă $\mathrm{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$, atunci măsura unghiului F este egală cu:
A. 60°; B. 45°; C. 30°; D. 75°.

(7p) **6.** Perimetrul triunghiului ABC cu măsura unghiului A egală cu 90°, $AB = 3$ cm şi $AC = 4$ cm este egal cu:
A. 10 cm; B. 12 cm; C. 16 cm; D. 18 cm.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(8p) **1.** Calculaţi distanţa dintre punctele M şi N, exprimată în centimetri, ştiind că $M(8, 3)$ şi $N(1, 4)$.

(8p) **2.** Dublul sumei dintre 1,(3) şi un sfert dintr-un număr raţional este egal cu diferenţa dintre triplul numărului respectiv şi 0,(6). Aflaţi numărul.

(8p) **3.** Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2(3x-\sqrt{2})+5y=-\sqrt{2} \\ 4x-3(2y+\sqrt{2})=7\sqrt{2} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(8p) **4.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele M, N şi P situate pe segmentele AD, BD, respectiv BC, astfel încât $\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BD}=\frac{1}{3}$ şi $\frac{BP}{BC}=\frac{1}{4}$.
Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 90°, $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, punctul D situat pe latura BC, astfel încât $AD = 13$ cm.

(8p) a) Calculaţi distanţa de la punctul A la dreapta BC.

(8p) b) Determinaţi raportul ariilor triunghiurilor ABD şi ACD.

EDITURA PARALELA 45

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.
PARTEA I. Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Numărul $\sqrt{0,25}$ aparține mulțimii:
A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Rădăcina pătrată a numărului natural 100 este egală cu:
A. 12; B. 14; C. 16; D. 10.

(0,5p) **3.** Dacă reprezentăm punctul $M(-5, -2)$ în sistemul de axe ortogonale xOy, atunci acesta aparține cadranului:
A. I; B. III; C. IV; D. II.

(0,5p) **4.** Regula prin care se stabilește o dependență funcțională între mulțimile $E = \{1, 3\}$ și $F = \{3, 9\}$ este:
A. $x \to 3x$; B. $x \to x^2$; C. $x \to x^3$; D. $x \to 2x$.

(0,5p) **5.** Rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{3}) + \left|-\sqrt{6}\right|$ este egal cu:
A. $2\sqrt{6}$; B. 0; C. $\sqrt{6}$; D. $-\sqrt{6}$.

(0,5p) **6.** Soluția ecuației $6 - 5x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, este:
A. 1; B. $-\frac{1}{3}$; C. $-\frac{1}{2}$; D. 3.

(0,5p) **7.** Aria dreptunghiului cu $L = 15$ cm și $l = \frac{2}{3}L$ cm este egală cu:
A. 100 cm^2; B. 20 cm^2; C. 30 cm^2; D. 150 cm^2.

(0,5p) **8.** Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\sphericalangle A = 42°$ și $\sphericalangle B = 75°$, atunci $\sphericalangle F$ este egal cu:
A. 36°; B. 50°; C. 63°; D. 48°.

(0,5p) **9.** Dacă triunghiul echilateral ABC cu perimetrul de 9 cm este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, R)$, atunci R este egală cu:
A. $\sqrt{3}$ cm; B. $2\sqrt{3}$ cm; C. $3\sqrt{2}$ cm; D. $\sqrt{6}$ cm.

PARTEA A II-A. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Se consideră numărul $a = \left(\frac{7}{2\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{6}{0,8(3)}}\right) : \frac{\sqrt{5}}{2}$. Arătați că $a \in \mathbb{Z}$.

2. Fie A și B două mulțimi. Se știe că $A \times B = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c, d)\}$.
(0,7p) a) Determinați mulțimile A și B.
(0,7p) b) Determinați mulțimea $B \times A$.

3. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Se știe că $AB = 4\sqrt{6}$ cm, $BC = 4\sqrt{6}$ cm și $\mathscr{P}_{ABCD} = 20\sqrt{6}$ cm.
(0,8p) a) Aflați $\sphericalangle DAB$. *(0,7p)* b) Calculați $\mathscr{A}_{ABCD}$. *(0,8p)* c) Calculați $\mathscr{P}_{COD}$.

EDITURA PARALELA 45

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

1. a) A; b) A; c) A; d) A. **2.** a) A; b) A; c) A; d) A. **3.** a) $24x = 36y \Leftrightarrow 24x : 4 = 36y : 4 \Leftrightarrow 6x = 9y$; b) și c) analog. **4.** a) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) Analog. **5.** a) $2z = 5t \Leftrightarrow 10 \cdot 2z = 10 \cdot 5t \Leftrightarrow 20z = 50t$; b) $2z = 5t \Leftrightarrow \frac{1}{10} \cdot 2z = \frac{1}{10} \cdot 5t \Leftrightarrow \frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2z = 5t \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot 2z = \sqrt{7} \cdot 5t \Leftrightarrow 2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$. **6.** a) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}y\right) : \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x = 2y$; b) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : 2\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}y\right) : 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = y$; c) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}y\right) : \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6}x = \sqrt{2}y$. **7.** Egalitățile se împart cu 5, respectiv cu 7 și se adună membru cu membru. **8.** $6a^4 = 6b^4 \Leftrightarrow a^4 = b^4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$. **9.** a) $xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1) = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1)$.
10. a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{xy+2x+2y+4}{2} = \frac{x(y+2)+2(y+2)}{2} = \frac{(y+2)(x+2)}{2} = \frac{1}{2}(x+2) \cdot (y+2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{xy+3x-3y+9}{3} = \frac{x(y-3)-3(y-3)}{3} = \frac{(y-3)(x-3)}{3} = \frac{1}{3}(x-3) \cdot (y-3)$. **11.** $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-c}{c} + \frac{1-a}{a} + \frac{1-b}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} - 1 + \frac{1}{a} - 1 + \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. **12.** $\frac{x^2+yz}{1+x^3} + \frac{y^2+zx}{1+y^3} + \frac{z^2+xy}{1+z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+yz}{xyz+x^3} + \frac{y^2+zx}{xyz+y^3} + \frac{z^2+xy}{xyz+z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+yz}{x(x^2+yz)} + \frac{y^2+zx}{y(y^2+zx)} + \frac{z^2+xy}{z(z^2+xy)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x = y \Leftrightarrow x\sqrt{2} = y\sqrt{2} \Leftrightarrow x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$. **2.** $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}x\right) : \sqrt{2} = \left(\sqrt{14}y\right) : \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$. **3.** $4a = 5b \Leftrightarrow 4a \cdot 3 = 5b \cdot 3 \Leftrightarrow 12a = 15b$; $14c = 10d \Leftrightarrow (14c) : 2 = (10d) : 2 \Leftrightarrow 7c = 5d$. Din $12a = 15b$ și $7c = 5d$ rezultă că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

1. a) Da; b) Da; c) Nu. **2.** a) Da; b) Da; c) Nu. **3.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **4.** a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x = \frac{1}{3}$; e) $x = -\frac{3}{2}$; f) $x = -\frac{2}{3}$; g) $x = \frac{4}{7}$; h) $x = \frac{3}{5}$. **5.** a) $x = 4$; b) $x = 18$; c) $x = 13$;

EDITURA PARALELA 45

Capitolul III. Asemănarea triunghiurilor

Lecţia 1. Segmente proporţionale. Teorema paralelelor echidistante

1. a) A; b) A; c) A; d) F. **2.** a) $\frac{MP}{MN}=\frac{1}{3}$; b) $\frac{MQ}{MN}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{MQ}{PN}=1$; d) $\frac{NQ}{NP}=\frac{1}{2}$. **3.** a) $\frac{AB}{CD}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{AB}{CD}=\frac{3}{2}$; c) $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{5}$; d) $\frac{AB}{CD}=\frac{7}{8}$. **4.** a) $\frac{AB}{BE}=\frac{1}{3}$; b) $\frac{AC}{BE}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{EA}{EB}=\frac{4}{3}$; d) $\frac{DE}{DA}=\frac{1}{3}$. **5.** a) $\frac{AB}{CD}=\frac{5}{8}$; b) $\frac{AB}{CD}=\frac{7}{2}$; c) $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{3}$; d) $\frac{AB}{CD}=\frac{8}{5}$. **6.** a) $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{MN}$; b) $\frac{AB}{MN}=\frac{EF}{CD}$. **7.** a) $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$; b) $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{4}$; c) $\frac{PB}{AM}=\frac{3}{2}$; d) $\frac{AB}{PB}=\frac{4}{3}$. **8.** a) $\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}$; b) $\frac{DC}{DA}=\frac{2}{5}$; c) $\frac{CD}{AB}=\frac{1}{3}$; d) $\frac{AB}{AD}=\frac{6}{5}$. **9.** a) $\frac{MB}{MA}=\frac{5}{4}$, $\frac{MA}{AB}=\frac{4}{9}$, $\frac{AB}{MB}=\frac{9}{5}$; b) $\frac{AB}{MA}=\frac{7}{2}$, $\frac{MB}{MA}=\frac{5}{2}$, $\frac{MB}{AB}=\frac{5}{7}$. **10.** $\mathcal{P}_{ABC}=67{,}5$ cm. **11.** a) Se arată că $\frac{AB}{AD}=\frac{MB}{MC}=\frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{DB}{DA}=\frac{CB}{CM}=\frac{2}{3}$. **12.** a) $AM_1=M_1M_2=M_2M_3=M_3D=4$ cm; b) $BN_1=N_1N_2=N_2N_3=N_3C=5$ cm. **13.** a) Se arată că $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{CE}=\frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}=\frac{3}{2}$. **14.** $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EB}$, deci $\frac{AD}{AD+DB}=$ $=\frac{AE}{AE+EB}$, sau $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AB}$, de unde rezultă că $AD\equiv AE$, prin urmare $D=E$. **15.** $\mathcal{A}_{ABM}=$ $=\mathcal{A}_{ACM}$, deci $\frac{AB\cdot ME}{2}=\frac{AC\cdot MF}{2}$, de unde rezultă că $AB\cdot ME=AC\cdot MF$ sau $\frac{AB}{AC}=\frac{MF}{ME}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{ED}{EF}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{FD}{FE}=\frac{1}{3}$; c) $\frac{FD}{DE}=\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{AB}{MN}=\frac{PQ}{CD}=\frac{2}{5}$. **3.** $\frac{MP}{MN}=\frac{5}{9}$, $\frac{PN}{MN}=\frac{4}{9}$.

Lecţia 2. Teorema lui Thales

1. a) A; b) A; c) F; d) A. **2.** a) $FC=6$ cm; b) $AE=1$ cm; c) $AC=40$ cm; d) $AE=6$ cm; e) $FC=3$ cm; f) $AB=15$ cm. **3.** a) $MN=20$ cm; b) $EM=5$ cm; c) $EM=6$ cm; d) $FN=9$ cm; e) $FN=18$ cm; f) $EM=21$ cm. **4.** a) $AE=4$ cm; b) $EC=15$ cm; c) $AD=4$ cm; d) $DB=20$ cm. **5.** a) $EC=$ $=24$ cm; b) $AE=5$ cm; c) $DB=7$ cm; d) $AD=5$ cm. **6.** a) $BF=16$ cm; b) $ED=5$ cm; c) $FC=$ $=15$ cm; d) $AE=21$ cm. **7.** a) $\mathcal{P}_{AEDF}=88$ cm; b) $\mathcal{P}_{AEDF}=104$ cm; c) $\mathcal{P}_{AEDF}=108$ cm. **8.** a) Dacă $E\in AB$, obţinem $AF=10{,}5$ cm şi $CF=17{,}5$ cm, iar dacă $A\in EB$, obţinem $AF=$ $=42$ cm şi $CF=70$ cm; b) Dacă $E\in AB$, obţinem $AF=9$ cm şi $CF=6$ cm, iar dacă $B\in$ $\in AE$, obţinem $AF=45$ cm şi $CF=30$ cm. **9.** a) Aplicând teorema bisectoarei obţinem $BD=$ $=10$ cm şi $CD=12$ cm; b) Analog obţinem $BD=9$ cm şi $CD=21$ cm. **10.** a) Aplicând teorema bisectoarei obţinem $AB=9$ cm şi $AC=12$ cm; b) Analog obţinem $AB=12$ cm şi $AC=8$ cm. **11.** $AG\cap BC=\{M\}$; $\frac{BE}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2BE}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow BE=\frac{BC}{3}$ şi analog se arată că $CF=\frac{BC}{3}$,

EDITURA PARALELA 45

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități 5
Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ 8
Lecția 3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 14
Lecția 4. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute 19
Lecția 5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute 27
Teste de evaluare sumativă 32
Fișă pentru portofoliul elevului 34
Probleme din realitatea cotidiană 36

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide 38
Lecția 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale 42
Lecția 8. Distanța dintre două puncte în plan 47
Lecția 9. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice 51
Lecția 10. Elemente de statistică matematică. Poligonul frecvențelor 56
Teste de evaluare sumativă 61
Fișă pentru portofoliul elevului 63
Probleme din realitatea cotidiană 65

GEOMETRIE

CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante 67
Lecția 2. Teorema lui Thales 70
Lecția 3. Reciproca teoremei lui Thales 76
Teste de evaluare sumativă 81
Fișă pentru portofoliul elevului 83
Lecția 4. Triunghiuri asemenea 85
Lecția 5. Teorema fundamentală a asemănării 88
Lecția 6. Criterii de asemănare a triunghiurilor 94
Teste de evaluare sumativă 100
Fișă pentru portofoliul elevului 102
Probleme din realitatea cotidiană 103

CAPITOLUL IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă 107
Lecția 8. Teorema înălțimii 110
Lecția 9. Teorema catetei 114
Lecția 10. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora 119
Teste de evaluare sumativă 126

EDITURA PARALELA 45

Fişă pentru portofoliul elevului 127
Lecţia 11. Noţiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic 129
Lecţia 12. Rezolvarea triunghiului dreptunghic 136
Lecţia 13. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie) în triunghiul echilateral, în pătrat şi în hexagonul regulat 143
Teste de evaluare sumativă 148
Fişă pentru portofoliul elevului 150
Probleme din realitatea cotidiană 152

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOŞTINŢELOR 155

TESTE DE EVALUARE FINALĂ 163

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI 166

EDITURA PARALELA 45