7

Maria Zaharia

Caiet de vacanță

MATEMATICĂ

Suport teoretic, exerciții
și probleme aplicative

Ediția a V-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.

Redactare: Ramona Rossall, Daniel Mitran
Corectură: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA
Caiet de vacanță : matematică : clasa a VII-a : suport teoretic, exercitii și probleme aplicative / Maria Zaharia. – Ed. a 5-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4259-2
51

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) Dacă x este un număr natural, întreg sau rațional, atunci x^2 este .... lui x şi despre numărul x^2 se spune că este ....

b) Rădăcina pătrată a unui număr pozitiv a este numărul pozitiv notat ...., al cărui pătrat ....

2. a) Dacă a şi p sunt două numere pozitive, atunci $\sqrt{a} = p$ dacă şi numai dacă ....

b) Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural este ....

3. a) Operația prin care se află rădăcina pătrată a unui număr pozitiv se numeşte .... din acel număr.

b) Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-un pătrat perfect se descompune .... şi se foloseşte proprietatea $n = p^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} =$ ....

4. a) Prin estimare se înțelege ....

b) A estima rădăcina pătrată a unui număr înseamnă ....

5. a) Pentru a estima, pentru a aproxima prin adaos sau prin lipsă la un anumit ordin de mărime rădăcina pătrată dintr-un număr pozitiv care nu este pătrat perfect, se foloseşte ....

b) A calcula rădăcina pătrată a numărului 2, care nu este ...., cu o eroare mai mică decât 0,00001, înseamnă a scrie $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ cu ajutorul unui .... şi a scrie rezultatul luând în considerație doar .... zecimale, adică $\sqrt{2} =$ ....

6. a) Dacă $n \in \{0, 1, 2, 7, 11, 12\}$, atunci $n^2 \in \{$..........................$\}$.

b) Dacă $n^2 \in \{9, 16, 25, 36, 64, 81, 100\}$, atunci $\sqrt{n^2} \in \{$..$\} =$ $=$ ....

7. Se consideră mulțimea $M = \{8, 121, 72, 144, 49, 169\}$.

a) Elementele mulțimii M care sunt pătrate perfecte sunt ....

b) Rădăcinile pătrate ale numerelor naturale pătrate perfecte din mulțimea M sunt ....

8. a) Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect poate fi: ....

b) Dacă ultima cifră a unui număr natural este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul respectiv ....
....

9. a) Dacă ultima cifră a unui număr este 4, atunci numărul respectiv poate ....
.... sau ....

b) Numerele 14, 24, 34, 44, 54 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi nu sunt ....

c) Numerele 4, 64, 144, 324 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi sunt ....;
$4 = 2^2$; $64 = 8^2$; $144 = 12^2$; $324 = 18^2$.

10. a) Dacă $\sqrt{\overline{1xy}}$ este număr natural, atunci $\overline{1xy} \in$ ....
....

b) Dacă $\sqrt{\overline{3ab}}$ este număr natural, atunci $a + b \in$ ....
....

11. Rădăcinile pătrate ale numerelor:

a) $2^2 \cdot 3^4$; $2^6 \cdot 5^2$; $5^4 \cdot 7^2$; $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ sunt ....;

b) 576; 1024; 1764; 15876 sunt ....

12. a) Pătratele perfecte mai mici decât 51 sunt ....

b) Pătratele perfecte cuprinse între 200 şi 391 sunt ....

13. a) Mulţimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^2 \leq x < 6^2\}$ are .... elemente.

b) Numărul pătratelor perfecte cuprinse între 2^2 şi 7^2 este egal cu ....

14. Efectuând următoarele calcule se obţine:

a) $\sqrt{13^2 - 5^2} =$ ....;

b) $\sqrt{12^2 + 16^2} =$ ....;

c) $\sqrt{2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^2} =$ ....;

d) $\sqrt{9 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5^2} =$ ....

15. a) Pătratele perfecte de trei cifre sunt: ....
....

b) Numerele de forma $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 7$ şi $5n + 8$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece
....
....

16. Folosind un calculator, scrieţi cu două zecimale exacte numerele:

a) $\sqrt{19} =$ ....; b) $\sqrt{111} =$ ....; c) $\sqrt{631} =$ ....

17. a) Două numere întregi consecutive între care se poate încadra numărul $\sqrt{31}$ sunt .... şi ....

b) Aproximarea prin lipsă la sutimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

c) Aproximarea prin adaos la miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

d) Rotunjirea la zecimi de miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

18. Numerele naturale x pentru care:

a) $4 < \sqrt{x} < 5$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{3} < x < \sqrt{19}$ sunt: ....

19. Trei numere raţionale cuprinse între:

a) $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{17}$ şi $\sqrt{18}$ sunt: ....

20. Se consideră mulţimile: $A = \left\{0; \frac{1}{2^0}; \frac{1}{2^1}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{64}{16}\right\}$ şi $B = \left\{\sqrt{x},\ x \in A \text{ şi } \sqrt{x} \in \mathbb{N}\right\}$. Cardinalul mulţimii B este ...., deoarece $B = \{$..................$\}$.

21. Se consideră mulţimea $A = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{19}; \frac{1}{20}\right\}$. Mulţimea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$ are .... elemente.

22. Se consideră mulţimea $M = \left\{\sqrt{0,16}; \sqrt{\frac{9}{49}}; \sqrt{\frac{121}{25}}; \sqrt{\frac{4}{169}}\right\}$. Numărul fracţiilor subunitare din această mulţime este egal cu ....

23. Calculând rădăcinile pătrate ale numerelor: $\frac{25}{49}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; 0,25; $\frac{1}{2500}$; $\frac{196}{324}$ se obţin rezultatele:

....

24. Precizaţi rădăcina pătrată a numărului n cu aproximaţie de o unitate (prin lipsă şi prin adaos) dacă:

a) $n = 37$; b) $n = 71$.

Soluţie: a) Deoarece $36 < 37 < 49$, adică $6^2 < 37 < 7^2$, rezultă că $6 < \sqrt{37} < 7$ şi $\sqrt{37} \approx 6$ (prin lipsă), respectiv $\sqrt{37} \approx 7$ (prin adaos).

....

....

25. Demonstraţi că numărul $n = 2019 + 2(1 + 2 + 3 + ... + 2018)$ este pătrat perfect.

CAPITOLUL II
ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1 Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități. Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

1. **Relația de egalitate** în mulțimea numerelor reale are următoarele proprietăți:

a) **reflexivitate**, adică ....;

b) **simetrie**, adică ....;

c) **tranzitivitate**, adică ....

2. O egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă dacă:

a) **adunăm un număr la egalitate**: dacă $a = b$, atunci $a + c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

b) **reducem un termen dintr-o egalitate**: dacă $a + c = b + c$, atunci $a =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

c) **adunăm două egalități**: dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;

d) **înmulțim egalitatea cu un număr**: dacă $a = b$, atunci $a \cdot c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

e) **împărțim egalitatea la un număr**: dacă $a \cdot c = b \cdot c$ și $c \neq 0$, atunci $a =$ ...., oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;

f) **înmulțim două egalități**: dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a \cdot c =$ ...., oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră ecuația $3x^2 - 7 = 38 - 2x^2$. Rezolvați ecuația, specificând proprietățile folosite.

4. a) Dacă $a = b$, arătați că $\frac{1}{3}a - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0,(3)b - \sqrt{3}$.

b) Dacă $\frac{1}{3}a - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0,(3)b - \sqrt{3}$, arătați că $a = b$.

5. a) Se numește **identitate** ....

....

....

b) ● Identitatea $a \cdot (b + c) =$ .... reprezintă distributivitatea înmulțirii ....

....

● Identitatea $a \cdot b + a \cdot c =$ .... reprezintă scoaterea ....

....

● Identitățile servesc la .... și ....

6. a) O ecuație de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește ....
Numerele a și b sunt coeficienții ecuației (a este ...., iar b este ....
.................................). Numărul real x este .... sau .... ecuației.

b) Se numește soluție a ecuației $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, un număr real $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziția
....

7. a) A rezolva o ecuație înseamnă ....

b) Două ecuații se numesc echivalente dacă ....

....

c) Ecuațiile $x - 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, și $\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}$, $x \in \mathbb{R}$, sunt ...., deoarece ....

....

8. Ecuația $ax + b = 0$ se scrie:

a) pentru $a = -2$ și $b = 1$ sub forma ....;

b) pentru $a = 1$ și $b = -\sqrt{2}$ sub forma ....;

c) pentru $a = -0,(3)$ și $b = 1,1(3)$ sub forma ....

9. Se consideră ecuația $ax + b = 0$, unde $a, b, x \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $a = 0$ și $b = 0$, ecuația se scrie ....,
cu $x \in \mathbb{R}$, și are ca mulțime de soluții ....

b) Dacă $a = 0$ și b este număr real diferit de zero, ecuația se scrie ....
și are ca mulțime de soluții ....

c) Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....

10. Dintre elementele mulțimii $\{-\sqrt{2}; 0; -1; 3; 2\}$, soluție a ecuației $3x - 2 = -5$ este ....,
deoarece înlocuind elementele din mulțime se obține ....

....

....

....

....

....

11. Se consideră ecuația $3(x-2)+11=2(3x-1)+x$. Verificați dacă:
a) numărul -2 este soluție a ecuației;
b) numărul $1,75$ este soluție a ecuației;
c) numărul $\sqrt{3}$ este soluție a ecuației.

Soluţie:

a) Pentru $x = -2$ se obține ....

.... $\Rightarrow x = -2$ ....;

b) Pentru $x = 1,75$ se obține ....

.... $\Rightarrow x = 1,75$ ....;

c) Pentru $x = \sqrt{3}$ se obține ....

.... $\Rightarrow x = \sqrt{3}$ ....

12. Soluția ecuației $\sqrt{2}\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=6$ este $x =$ ...., deoarece $\sqrt{2}\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=6 \Leftrightarrow$ ....

....

....

13. a) Dacă $3x-1=5$, atunci $3x =$ .... $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....
b) Dacă $\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{6}=0$, atunci $\sqrt{2}\cdot x =$ .... $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....

14. Rezolvați ecuațiile:
a) $0,2x-0,8=0$; b) $\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot x=\sqrt{2}-2$; c) $0,(3)\cdot x-\frac{1}{2}=2,5$.

Soluţie:

a) $0,2x-0,8=0 \Leftrightarrow 0,2x =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....;

b) $\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot x=\sqrt{2}-2 \Leftrightarrow x =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....;

c) $0,(3)\cdot x-\frac{1}{2}=2,5 \Leftrightarrow 0,(3)\cdot x=2,5+0,5 \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow x =$ .... $\Leftrightarrow x =$ ....

15. Se consideră ecuația $5x+m=0$, unde $m, x \in \mathbb{R}$. Rezolvați ecuația pentru:
a) $m=-5$; b) $m=0,2$; c) $m=-\sqrt{5}$.

Soluţie:

a) Înlocuind pe m cu -5 se obține $5x-5=0 \Leftrightarrow$ ....

b) ………………………………………………………………………… .

c) Înlocuind pe m cu $-\sqrt{5}$ se obține ……………………………… $\Leftrightarrow x =$ ……………… .

16. a) Scrieți soluția rațională a ecuației $(x-3)\left(2x-\sqrt{3}\right)=0$.

b) Scrieți soluția naturală a ecuației $|x-1| = 5$.

c) Scrieți soluția reală a ecuației $\sqrt{3}\cdot x-3=3x-3\sqrt{3}$.

Soluție:

a) Din $(x-3)\left(2x-\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow$ ……………………… sau ………………………, adică $x =$ ……………… sau ……………… . Dar $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x =$ ……………………… .

b)

c)

17. a) Rezolvați ecuația $3x-\sqrt{3}=\sqrt{27}$.

b) Aflați $m \in \mathbb{R}$, știind că $x = \sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $mx + 2 = 2\sqrt{2}$.

Soluție:

a) $3x-\sqrt{3}=\sqrt{27} \Leftrightarrow$ ……………………………………… $\Leftrightarrow x =$ ………………;

b) Înlocuind pe x cu $\sqrt{2}-1$ se obține ………………………………………………
………………………………………………………………… $\Rightarrow$ ……………… .

18. a) Rezolvați ecuația $\left|-\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right|=\sqrt{27}$.

b) Scrieți soluția rațională a ecuației $\frac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}=0$.

Soluție:

a)

b)

19. Se consideră mulțimea $A = \left\{\sqrt{3}; 0; -\sqrt{3}; 1\right\}$. Verificați care dintre elementele mulțimii A este soluție a ecuației $3x-2\sqrt{3}=x-\sqrt{48}$.

Soluție:

Pentru $x = \sqrt{3}$ se obține ………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
………………………………………………………… $\Rightarrow x =$ ……………… este soluție.

20. a) Calculați pentru ce valoare a parametrului m ecuația $2mx = 3 + 2x$ are soluția $x = -1$.

b) Calculați pentru ce valoare a parametrului a ecuația $ax + 1 = x - a$ are soluția $x = 0,(6)$.

c) Calculați pentru ce valoare a parametrului m ecuația $mx - \sqrt{3} = x - m\sqrt{3}$ are soluția $x = \sqrt{3}$.

Soluţie:

a) Pentru $x = -1$ se obține ....

b) Pentru $x = 0,(6) = \frac{6^{(3}}{9} = \frac{2}{3}$ se obține ....

....

c) Pentru $x = \sqrt{3}$ se obține ....

....

II.2 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

1. Scrierea $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sunt numere reale date şi $x \in \mathbb{R}$, reprezintă forma generală a ....

2. a) O pereche de numere reale (x_0, y_0) se numeşte **soluție a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute** dacă ....

b) **A rezolva un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute** înseamnă ....

....

c) Două sisteme sunt **echivalente** ....

3. Sistemele de două ecuații liniare cu două necunoscute se pot rezolva prin următoarele metode:

....

4. Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ -x + 3y = 7 \end{cases}$. Verificați dacă este soluție a sistemului perechea:

a) $(1, 8)$; b) $(-4, 1)$; c) $(-1, 2)$.

CAPITOLUL II
CERCUL

1. a) Printr-un punct A se pot construi .... de cercuri (figura 1.a).

b) Prin două puncte se pot construi .... de cercuri, centrele lor aflându-se pe .... (figura 1.b).

c) Prin trei puncte necoliniare se poate construi ...., centrul cercului fiind punctul de intersecție .... (figura 1.c).

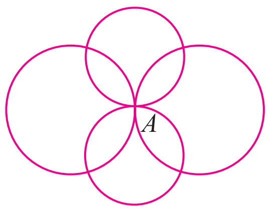


Fig. 1.a

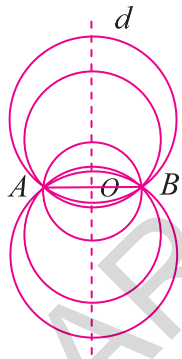


Fig. 1.b

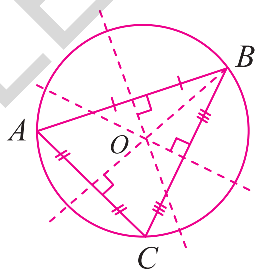


Fig. 1.c

2. a) Într-un cerc sau în cercuri congruente, arcelor congruente le corespund ....

b) Într-un cerc sau în cercuri congruente, coardelor congruente le corespund ....

3. Analizați figurile de mai jos și completați propozițiile:

a) Dacă $OD \perp AB$, atunci $BC \equiv$ .... și $\overset{\frown}{BD} \equiv$ ....

b) Dacă $AB \parallel CD$, atunci ....

c) Dacă $AB \equiv CD$, atunci ....

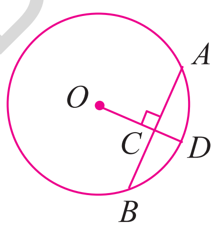


Fig. 2.a

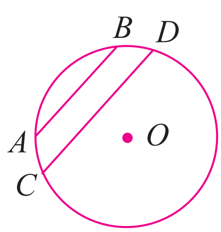


Fig. 2.b

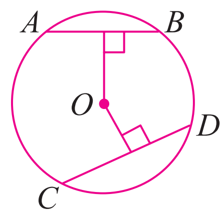


Fig. 2.c

4. Calculați razele cercurilor din figura 3, știind că $O_1O_2 = 18$ cm, $O_1O_3 = 14$ cm, $O_2O_3 = 10$ cm.

....

....

....

....

....

....

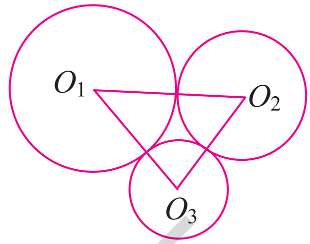


Fig. 3

5. a) O dreaptă care are un singur punct comun cu un cerc se numeşte ....

b) Distanța de la centrul cercului la tangentă este ....

c) Tangentele dintr-un punct exterior la un cerc ....

6. În figurile 4.a şi 4.b completați desenele, astfel încât:

a) *PA* şi *PB* să fie tangente dintr-un punct exterior la un cerc, iar dreapta *a* să fie tangentă la cerc în punctul *M*;

b) dreptele a_1 şi a_2 să fie tangente comune interioare;

c) dreptele b_1 şi b_2 să fie tangente comune exterioare.

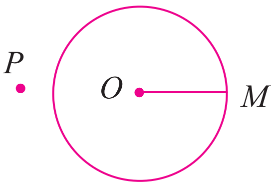


Fig. 4.a

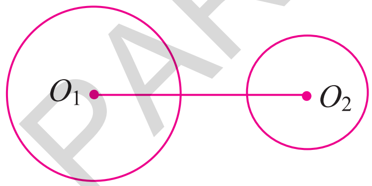


Fig. 4.b

7. În figura 5, *AB*, *AC* şi *DE* sunt tangente la cerc. Dacă *AB* = 8 cm, atunci perimetrul triunghiului *ADE* este ....

....

....

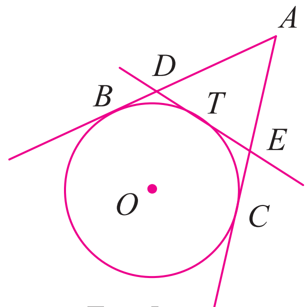


Fig. 5

8. În figura 6, *AB*, *AC* şi *DE* sunt tangente la cerc.

a) *AB* = *AC*, deoarece $\Delta AOB \equiv$ ....

....

b) Măsura unghiului *AOE* este egală cu ....

....

....

....

....

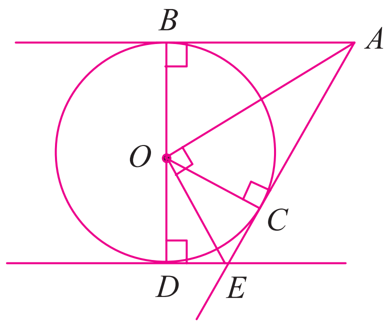


Fig. 6

9. a) Se numeşte **unghi înscris** în cerc ....

b) **Măsura unui unghi înscris în cerc** este egală cu ....

10. În figura 7 se ştie că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$. Arătaţi că dreapta d este .... Justificaţi!

....

....

....

....

....

....

....

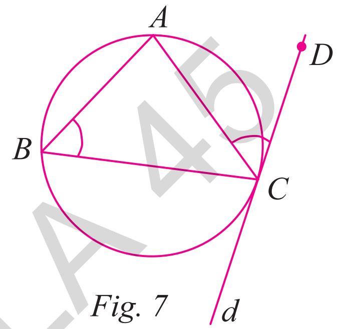


Fig. 7

11. Calculaţi măsurile unghiurilor înscrise în cercurile din figura 8.

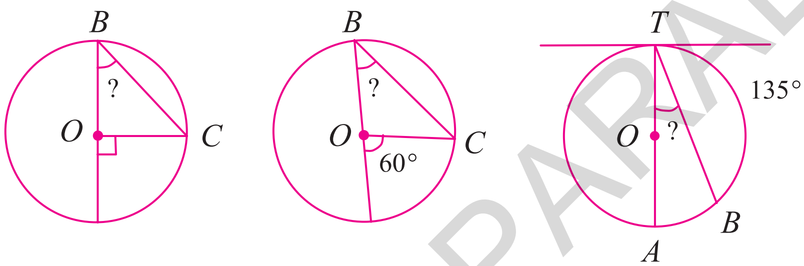


Fig. 8.a *Fig. 8.b* *Fig. 8.c* *Fig. 8.d*

....

....

....

....

12. Un unghi înscris într-un cerc are măsura egală cu $37°45'$.

a) Măsura arcului corespunzător este egală cu ....

b) Măsura unghiului la centru ce subîntinde acelaşi arc cu unghiul înscris este egală cu ....

13. Într-un cerc cu centrul în O se consideră o coardă AB. Dacă CD este un diametru perpendicular pe coarda AB şi măsura unghiului AOB este egală cu $103°24'$, atunci măsurile arcelor mici sunt egale cu:

$\overset{\frown}{AC}$ = ...;

$\overset{\frown}{BC}$ = ...;

$\overset{\frown}{AD}$ = ...;

$\overset{\frown}{BD}$ = ...

14. Completați:

a) Unghiurile înscrise în același semicerc subîntind același arc, deci sunt ....

b) Toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt ....

15. Se consideră cercul de centru O şi rază 4 cm. Se consideră punctele A, B, C şi D pe cerc, astfel încât să avem $\overset{\frown}{AB} = 120°$, $\overset{\frown}{BC} = 60°$ şi $\overset{\frown}{CD} = 80°$. Calculați:

a) unghiurile patrulaterului $ABCD$;

b) unghiurile formate de laturile patrulaterului cu diagonalele acestuia.

16. a) Se numeşte **triunghi înscris** în cerc ....

Centrul cercului circumscris unui triunghi este ....

b) Se numeşte **triunghi circumscris** unui cerc ....

Centrul cercului înscris în triunghi este ....

c) Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este ....

17. Construiți:

a) un triunghi înscris într-un cerc;

b) un triunghi circumscris unui cerc.

18. Se consideră un triunghi echilateral şi cercul circumscris triunghiului. Demonstrați că distanțele de la centrul cercului la laturile triunghiului sunt egale.

19. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle ABC = 60°$ şi $AB = 10$ cm. Se notează cu D piciorul perpendicularei din A pe BC, cu M mijlocul laturii AB, cu P punctul în care cercul circumscris triunghiului ABD intersectează latura AC, iar cu H intersecția dreptelor BP şi AD. Calculați:

a) raza cercului circumscris triunghiului ABD;

b) lungimea segmentului DM;

c) distanța de la centrul cercului circumscris triunghiului ABD la dreapta AD;

d) măsurile unghiurilor BPD şi DPC.

20. Fie un triunghi ABC înscris într-un cerc. Perpendiculara în A pe AC intersectează cercul în N, iar perpendiculara în A pe AB intersectează cercul în M. Demonstrați că:

a) $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$; b) $\sphericalangle BCM + \sphericalangle CBN = 180°$; c) $MN \parallel BC$.

21. a) Un patrulater se numeşte **înscris** în cerc, dacă ....

b) Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci diagonalele sale formează cu ....

....

c) Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci unghiurile opuse ale patrulaterului sunt ....

....

22. Un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc determină arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, având măsurile de 50°, 70° şi, respectiv, 100°. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.

23. Fie OA şi OC două raze perpendiculare ale unui cerc de centru O, B mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{AC}$, iar D un punct al arcului mare $\overset{\frown}{AC}$, astfel încât $\sphericalangle OCD = 10^\circ$. Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului înscris $ABCD$.

24. Se consideră un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc. Fie M, N, P, Q mijloacele arcelor mici $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ şi $\overset{\frown}{DA}$. Demonstraţi că $MP \perp NQ$.

25. a) Un patrulater este **inscriptibil** ....

b) Scrieţi enunţurile teoremelor care dau condiţii necesare şi suficiente pentru ca un patrulater să fie inscriptibil.

26. În figura 9, patrulaterul convex $ABCD$ are $\sphericalangle A = 60^\circ$, iar $\sphericalangle C = 100^\circ$. Ştiind că AP, BQ, CR, DS sunt bisectoarele unghiurilor patrulaterului, demonstraţi că patrulaterul $PQRS$ este inscriptibil.

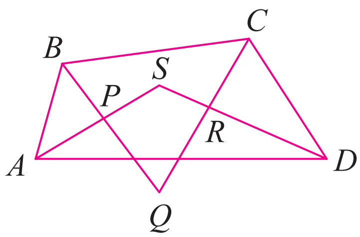


Fig. 9

27. Fie AA' înălțime în triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, şi fie M şi N mijloacele laturilor AB şi AC. Demonstrați că patrulaterul $AMA'N$ este inscriptibil.

28. Înălțimile BD ($D \in AC$) şi CE ($E \in AB$) ale unui triunghi isoscel ABC, cu $AB = AC$, se intersectează în punctul H. Se notează cu F simetricul punctului H față de BC.

a) Demonstrați că patrulaterele $BCDE$, $AEHD$ şi $ABFC$ sunt inscriptibile în $\mathscr{C}(O_1, R_1)$, $\mathscr{C}(O_2, R_2)$ şi $\mathscr{C}(O_3, R_3)$.

b) Dacă $AB = AC = 5$ cm şi $BC = 6$ cm, determinați centrul şi lungimea razei pentru fiecare din cele trei cercuri identificate la punctul precedent.

c) Calculând distanțele dintre centre, arătați că două dintre cercuri sunt tangente interioare.

29. Raza unui cerc este de 15 cm, iar lungimea unei coarde a cercului este de 24 cm. Calculați distanța de la centrul cercului la acea coardă.

30. Raza unui cerc este de 37,5 cm. Baza mare a unui trapez înscris în cerc este un diametru, iar baza mică are lungimea de 51 cm. Calculați perimetrul şi lungimile diagonalelor trapezului.

31. a) Un poligon se numeşte **poligon înscris în cerc** dacă ....

b) Un poligon care poate fi înscris într-un cerc se numeşte poligon ....

32. a) Se numeşte **poligon regulat** ....

....

b) Orice poligon regulat se poate înscrie într-un ...., numit ....

....

c) Poligonul regulat cu trei laturi se numeşte ....

d) Poligonul regulat cu patru laturi se numeşte ....

e) Poligonul regulat cu şase laturi se numeşte ....

33. a) Centrul cercului circumscris unui poligon regulat se numeşte ....

b) Mediatoarele laturilor unui poligon regulat sunt concurente în ....,

care este şi ....

c) Măsura unui arc mic de cerc determinat de o latură a unui poligon regulat cu *n* laturi înscris în cerc este egală cu ....

34. a) Desenați un triunghi echilateral înscris într-un cerc.

b) Desenați un pătrat înscris într-un cerc.

c) Desenați un hexagon regulat înscris într-un cerc.

35. Calculați măsura arcelor mici determinate de vârfurile unui:

a) triunghi echilateral; b) pătrat; c) hexagon regulat.

36. a) Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este egală cu ....

b) Măsura unui unghi al unui poligon convex cu n laturi este egală cu ....

37. Aflați măsurile unghiurilor unui poligon regulat cu:

a) 6 laturi; b) 8 laturi; c) 12 laturi.

38. Aflați numărul de laturi ale unui poligon regulat cu măsura fiecărui unghi egală cu:

a) 135°; b) 144°; c) 150°.

39. Aflați suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu:

a) 6 laturi; b) 8 laturi; c) 10 laturi.

40. Scrieți formulele pentru:

a) lungimea cercului şi aria discului;

b) lungimea arcului de cerc şi aria sectorului circular.

41. Analizați figura 10 şi calculați apoi lungimile arcelor de cerc şi ariile sectoarelor circulare colorate, ştiind că raza cercului este egală cu 12 cm.

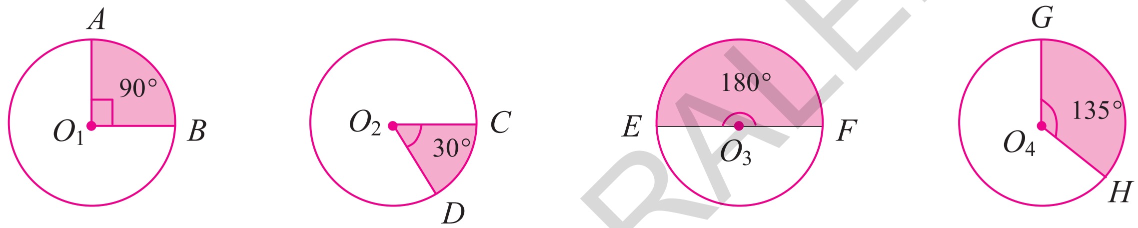


Fig. 10.a *Fig. 10.b* *Fig. 10.c* *Fig. 10.d*

a)

b)

c)

d)

42. a) Lungimea unui cerc cu raza de 5 cm este de ....

....

....

b) Aria discului cu raza de 5 cm este de ....

....

....

43. Calculați raza unui cerc care are lungimea egală cu:

a) 5π; b) 24π; c) 8π.

44. Calculați raza unui disc care are aria egală cu:

a) 16π cm^2; b) $1{,}21\pi$ cm^2; c) 49π cm^2.

45. Calculați lungimea unui arc de cerc $\overset{\frown}{AB}$, ştiind că $R = 6$ cm şi măsura arcului de cerc este egală cu:

a) $30°$; b) $60°$; c) $90°$; d) $120°$.

46. Calculați aria unui sector circular, ştiind că $R = 6$ cm şi arcul corespunzător are măsura egală cu:

a) $60°$; b) $45°$; c) $90°$; d) $120°$.

47. Lungimea laturii unui triunghi echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O este $12\sqrt{3}$ cm. Paralela prin O la BC intersectează latura AC în D. Calculați AD şi DC.

48. Completați spațiile punctate, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Dacă AB este o coardă și CD un diametru perpendicular pe coardă, $AB \cap CD = \{M\}$, atunci $AM \equiv$ ...., $\overset{\frown}{AD} \equiv$ .... și $\overset{\frown}{AC} \equiv$ ....

b) Dacă AB și CD sunt două coarde paralele ale unui cerc, atunci ....

c) Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci ele sunt ....

d) Dacă două coarde ale unui cerc sunt egal depărtate de centrul cercului, atunci ....

49. Analizați propozițiile care urmează și completați cu A, dacă propoziția este adevărată, și cu F, dacă propoziția este falsă.

a) Dacă vârfurile paralelogramului $ABCD$ se află pe un cerc, atunci $ABCD$ este dreptunghi. ☐

b) Dacă vârfurile unui trapez se află pe un cerc, atunci trapezul este isoscel. ☐

c) Dacă diagonalele unui romb sunt congruente, atunci vârfurile rombului se află pe un cerc. ☐

50. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, ale cărui laturi sunt tangente unui cerc. Se știe că $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm și $CD = 6$ cm. Calculați perimetrul și aria trapezului $ABCD$.

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL I

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de 2 ore.
Se acordă 1 punct din oficiu.

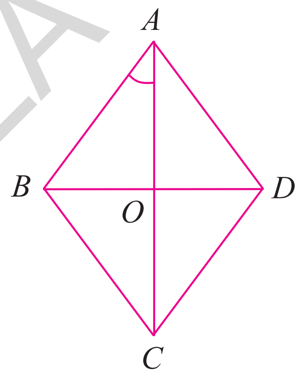
I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

0,4p **1.** a) Numerele întregi cuprinse între –3,7 și 2,5 sunt ....

0,4p b) Rezultatul calculului $\sqrt{9}-\sqrt{9^2}$ este egal cu ....

0,4p c) Partea întreagă a numărului $\sqrt{108}$ este ....

2. În figura alăturată, *ABCD* este un romb cu $\sphericalangle BAC = 30°$ și $BO = 3$ cm.



0,4p a) Măsura unghiului *ABD* este egală cu ....°.

0,4p b) Perimetrul rombului *ABCD* este egal cu .... cm.

0,4p c) Aria rombului *ABCD* este egală cu .... cm².

II. Dacă apreciați că afirmația este adevărată, încercuiți litera A. În caz contrar, încercuiți litera F.

0,4p **A / F** **1.** Media aritmetică a numerelor $-\sqrt{32}$ și $2\sqrt{2}$ este egală cu $-\sqrt{2}$.

0,4p **A / F** **2.** Introducând factorii sub radical se obține $-2\sqrt{5}=\sqrt{20}$.

0,4p **A / F** **3.** Suma măsurilor unghiurilor exterioare unui patrulater convex este egală cu 360°.

0,4p **A / F** **4.** O paralelă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi sau cu prelungirile acestora un triunghi asemenea cu triunghiul inițial.

III. Încercuiți răspunsul corect. Numai una din cele patru variante este corectă.

0,5p **1.** Suma soluțiilor ecuației $\left(x+\sqrt{12}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=0$ este egală cu:

A. $-\sqrt{15}$; B. $-\sqrt{3}$; C. $\sqrt{9}$; D. $\sqrt{3}$.

0,5p **2.** Un număr rațional cuprins între $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ este:

A. 2; B. 3; C. $\frac{3}{2}$; D. $1\frac{3}{4}$.

0,5p **3.** Fie $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Dacă $AB = 6$ cm și raportul de asemănare este $\frac{2}{3}$, atunci lungimea segmentului *DE* este egală cu:

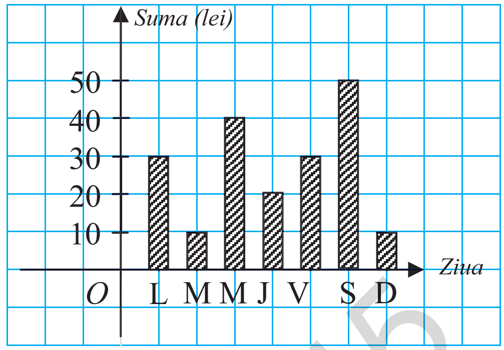
A. 9 cm; B. 4 cm; C. 12 cm; D. 18 cm.

0,5p **4.** Diagonala unui pătrat are lungimea de 4 cm. Perimetrul pătratului este egal cu:

A. 16 cm; B. $16\sqrt{2}$ cm; C. 8 cm; D. $8\sqrt{2}$ cm.

IV. Scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată, Andrei a reprezentat cheltuielile din săptămâna petrecută la Poiana Brașov.

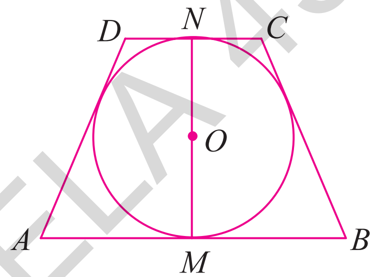


0,5p a) Calculați suma cheltuită în acea săptămână.

0,5p b) Calculați media sumelor cheltuite de Andrei în primele 6 zile.

0,5p c) Calculați cât la sută din suma cheltuită sâmbătă reprezintă suma cheltuită joi.

2. În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB = 18$ cm, $DC = 12$ cm și $AD \cap BC = \{E\}$.



0,5p a) Calculați lungimea segmentului MN.

0,5p b) Calculați aria trapezului $ABCD$.

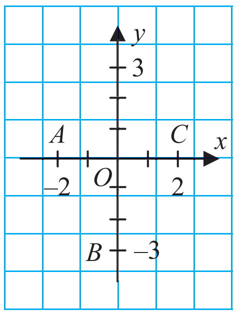
0,5p c) Calculați perimetrul triunghiului ABE.

TESTUL 2

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de 2 ore.
Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

1. În sistemul de axe ortogonale xOy din figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B și C. Punctul D este simetricul punctului B față de punctul O.

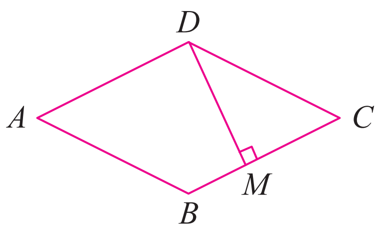


0,4p a) Coordonatele punctului D sunt ....

0,4p b) Perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu .... u.m.

0,4p c) Aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu .... (u.m.^{2}).

2. Rombul din figura alăturată are aria egală cu $18\sqrt{3}$ cm^2 și $AB = 6$ cm.



0,4p a) Lungimea înălțimii DM este egală cu .... cm.

0,4p b) Lungimea segmentului MC este egală cu .... cm.

0,4p c) Măsura unghiului CDM este egală cu ....°.

SOLUȚII

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) pătratul; pătrat perfect; b) $\sqrt{a}$; este egal cu a. **2.** a) $a = p^2$; b) acel număr natural. **3.** a) extragerea rădăcinii pătrate; b) numărul în factori primi; $n = p^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} = p$, $n \in \mathbb{N}$. **4.** a) stabilirea valorii aproximative a unui obiect, a unui bun; b) a aproxima prin lipsă sau prin adaos la zecimi, sutimi, miimi, ..., în funcție de cerința problemei, rădăcina pătrată a numărului respectiv. **5.** a) un calculator; b) pătrat perfect; calculator; primele 5 zecimale, adică $\sqrt{2} = 1{,}41421$. **6.** a) $n^2 \in \{0, 1, 4, 49, 121, 144\}$; b) $\sqrt{n^2} \in \left\{\sqrt{3^2}, \sqrt{4^2}, \sqrt{5^2}, \sqrt{6^2}, \sqrt{8^2}, \sqrt{9^2}, \sqrt{10^2}\right\} = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$. **7.** a) $121 = 11^2$; $144 = 12^2$; $49 = 7^2$; $169 = 13^2$; b) $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{169} = 13$. **8.** a) $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) nu este pătrat perfect. **9.** a) să fie pătrat perfect sau poate să nu fie pătrat perfect; b) pătrate perfecte; c) pătrate perfecte. **10.** a) $\overline{1xy} \in \{10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2\} \Rightarrow \overline{1xy} \in \{100, 121, 144, 169, 196\}$; b) $a + b \in \{6, 7\}$, deoarece $\overline{3ab} \in \{324, 361\}$. **11.** a) $2 \cdot 3^2 = 18$; $2^3 \cdot 5 = 40$; $5^2 \cdot 7 = 175$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$; b) 24; 32; 42; 126. **12.** a) $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; b) $15^2 = 225$; $16^2 = 256$; $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $19^2 = 361$. **13.** a) 27; b) 4. **14.** a) $\sqrt{169-25} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$ și analog; b) 20; c) 9; d) 5. **15.** a) $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$; $16^2 = 256$; $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $19^2 = 361$; $20^2 = 400$; $21^2 = 441$; $22^2 = 484$; $23^2 = 529$; $24^2 = 576$; $25^2 = 625$; $26^2 = 676$; $27^2 = 729$; $28^2 = 784$; $29^2 = 841$; $30^2 = 900$; $31^2 = 961$; b) Notând cu u(x) ultima cifră a unui număr x se obțin u($5n + 2$) $\in \{7, 2\}$, u($5n + 3$) $\in \{8, 3\}$, u($5n + 7$) $\in \{2, 7\}$ și u($5n + 8$) $\in \{3, 8\}$ și, dacă ultima cifră a unui număr este 2, 3, 7 sau 8, numărul nu este pătrat perfect. **16.** a) 4,35; b) 10,53; c) 25,11. **17.** a) $25 < 31 < 36 \Leftrightarrow 5 < \sqrt{31} < 6$; b) 5,56; c) 5,568; d) 5,5678. **18.** a) 17, 18, 19, ..., 24; b) 2, 3, 4. **19.** a) 1,5; 1,6; 1,7; b) 4,15; 4,18; 4,20. **20.** card $B = 3$, deoarece $B = \{0, 1, 2\}$. **21.** 4. **22.** 3. **23.** $\frac{5}{7}; \frac{4}{9}; 0{,}5; \frac{1}{50}; \frac{14}{18}$. **24.** b) 8, respectiv 9. **25.** $n = 2019 + 2 \cdot \frac{2018 \cdot 2019}{2} \Rightarrow n = 2019 + 2018 \cdot 2019 = 2019 \cdot (1 + 2018) = 2019^2$ și este pătrat perfect.

I.2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

1. a) nu se divide prin pătratul niciunui număr prim; b) numere libere de pătrate, deoarece nu se divid prin pătratul niciunui număr prim; c) nu sunt numere libere de pătrate, deoarece se divid prin pătratele numerelor 3, 2, 5, 7 și, respectiv, 11. **2.** a) $a\sqrt{b}$ – formula pentru scoaterea factorilor de sub radical; b) a. **3.** $\sqrt{112} = \sqrt{2^4 \cdot 7} = 2^2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$. **4.** a) $\sqrt{a^2 b}$; introducere a factorilor sub radical; b) $\sqrt{108}$. **5.** a) $28 = 2^2 \cdot 7$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $147 = 3 \cdot 7^2$; b) $2\sqrt{7}$, $6\sqrt{5}$ și $7\sqrt{3}$. **6.** a) $\sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$; b) $\sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$; c) $\sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$; d) $\sqrt{4^2 \cdot 6} = \sqrt{16 \cdot 6} = \sqrt{96}$. **7.** a) $2^2 \cdot 5\sqrt{3} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = \sqrt{1200} < \sqrt{1225} = 35$; b) $34 = \sqrt{1156} < 1200 = 2^2 \cdot 5\sqrt{3}$. **8.** a) $9 = \sqrt{81} < \sqrt{90} < \sqrt{100} = 10$; b) 9, respectiv 10. **9.** a) 1; b) 6. **10.** a) $\sqrt{25^n \cdot (1 + 25 + 25^2)} = \sqrt{5^{2n} \cdot 651} = 5^n\sqrt{651}$; b) $\sqrt{(2 \cdot 5^2)^n \cdot (2 \cdot 3^2)^{n+1} \cdot (3^2)^n} = \sqrt{2^n \cdot 5^{2n} \cdot 2^n \cdot 2 \cdot 3^{2n} \cdot 3^2 \cdot 3^{2n}} = \sqrt{2^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 2 \cdot 3^{4n+2}} = 2^n \cdot 5^n \cdot 3^{2n+1}\sqrt{2} = 10^n \cdot 3^{2n+1}\sqrt{2}$.

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE 5
I.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional 5
I.2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical 8
I.3. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Modulul unui număr real 9
I.4. Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$, a, $b \in \mathbb{Q}^*$, b pozitiv 14
I.5. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive 20
I.6. Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ 24

CAPITOLUL II. ECUAȚII ŞI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE 27
II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități. Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ 27
II.2. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute 31
II.3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații 34

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR 39

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL 49

CAPITOLUL II. CERCUL 75

CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR 87

CAPITOLUL IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC 97

TESTE RECAPITULATIVE 110

SOLUȚII 118