Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică

algebră
geometrie

clasa a VIII-a

partea I

ediția a XIII-a

mate 2000 – consolidare

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Andreea Roșca, Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 13-a. – Pitești : Paralela 45, 2024 –
vol.
ISBN 978-973-47-4094-9
Partea 1. – 2024. – ISBN 978-973-47-4095-6
I. Negrilă, Maria
51

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

* **Iniţiere (înţelegere)**

** **Consolidare (aplicare şi exersare)**

*** **Excelenţă (aprofundare şi performanţă)**

**** **Supermate**

Legendă

PE = **portofoliul elevului**

PP = **portofoliul profesorului**

PE-PP = **portofoliul elevului - portofoliul profesorului**

Recapitulare şi evaluare inițială

PE Teste cu exerciţii şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării iniţiale

✸ TESTUL 1 ✸

1. Efectuaţi calculele:

a) $\sqrt{6}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{8}-\sqrt{27}$; b) $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{108}-\sqrt{75}-\sqrt{27}\right)$;

c) $\left(\frac{4}{\sqrt{50}}+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)-\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $3(x+3)-5(x+1)=4(x+4)$; b) $|2x-3|=5$;

c) $\frac{4x-3}{3}-\frac{2x+1}{2}=1\frac{1}{6}$; d) $\sqrt{(x-2)^2}=\frac{1}{4}$; e) $(x+3)^2=25$.

3. Se consideră numerele $a=2\sqrt{432}-3\sqrt{75}-\sqrt{147}$ şi $b=3\sqrt{243}-3\sqrt{108}-\sqrt{27}$. Calculaţi media geometrică a numerelor a şi b.

4. Rezolvaţi sistemele:

a) $\begin{cases}2x-3y=17\\3x+2y=6\end{cases}$; b) $\begin{cases}3(2x+y)-2(x+2y-5)=20\\5(x-y+2)=4(2x-y+3)-13\end{cases}$.

5. Se consideră punctele $A(-2; -3)$, $B(1; 3)$ şi $C(3; 7)$.

a) Reprezentaţi punctele într-un sistem de axe de coordonate.

b) Arătaţi că punctele A, B şi C sunt coliniare.

c) Determinaţi coordonatele punctului M, mijlocul segmentului BC.

6. O persoană constată că după ce a cheltuit 25% din suma pe care a avut-o şi încă 20% din restul rămas, mai are în portofel 252 lei. Ce sumă a avut iniţial?

7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $\measuredangle A = 90°$ şi $\measuredangle C = 30°$. Ştiind că mediana $AM = 10$ cm, $M \in BC$, calculaţi:

a) perimetrul triunghiului ABC;

b) valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{\Delta ABD}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}$, unde D este piciorul înălţimii duse din A pe ipotenuza BC.

8. În cercul de centru O şi rază $R = 8$ cm se construieşte diametrul AB şi o coardă CD, astfel încât $AB \cap CD = \{E\}$. Ştiind că $\measuredangle BDC = 60°$, calculaţi aria triunghiului AOC.

Algebră

Capitolul I
Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$

PP **Competenţe specifice**

- **C1.** Recunoaşterea apartenenţei unui număr real la o mulţime
- **C2.** Efectuarea unor operaţii cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulţimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- **C3.** Utilizarea unor procedee matematice pentru operaţii cu intervale şi rezolvarea inecuaţiilor în $\mathbb{R}$
- **C4.** Folosirea terminologiei aferente noţiunilor de mulţime, de interval numeric şi de inecuaţii
- **C5.** Interpretarea unei situaţii date utilizând intervale şi inecuaţii
- **C6.** Rezolvarea unor situaţii date, utilizând intervale numerice sau inecuaţii

PE-PP 1. Mulţimi de numere. Forme de scriere a unui număr

Mulţimea numerelor naturale, notată cu $\mathbb{N}$, este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Observaţii:

a) Mulţimea notată cu $\mathbb{N}^*$ este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ şi $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

b) Avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$:

i) $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$ şi **consecinţele**: $x + y = 0$ înseamnă $x = y = 0$, iar $x \cdot y = 1$ înseamnă $x = y = 1$.

ii) $x - y \in \mathbb{N}$ numai dacă $\boldsymbol{x \geq y}$, iar $x : y \in \mathbb{N}$ numai dacă **există** $\boldsymbol{z} \in \mathbb{N}$ astfel încât $y \cdot z = x$. Dacă acest lucru nu are loc, se foloseşte teorema **împărţirii cu rest**: $x = yz + t$, cu $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < y$, $y \neq 0$.

iii) $x^y \in \mathbb{N}$, cu excepţia cazului 0^0.

Mulţimea numerelor întregi, notată cu $\mathbb{Z}$, este:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Observaţii:

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; în plus, se definesc: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1\}$ şi $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Pentru $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, avem:

i) $x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

ii) Dacă $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.

iii) $x : y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ dacă şi numai dacă există $z \in \mathbb{Z}$, cu $x = yz$. În caz contrar, $x = yz + t$, unde $t \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq |t| < |y|$.

Mulţimea numerelor raţionale, notată cu $\mathbb{Q}$, este:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z}\right\}.$$

Observaţii:

a) Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, iar mulţimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se numeşte mulţimea numerelor raţionale **neîntregi**. De asemenea, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Un **număr raţional** este reprezentat de o fracţie de forma $\frac{x}{y}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y \in \mathbb{Z}^*$.

Vom spune că două fracţii $\frac{x}{y}$ şi $\frac{z}{t}$, cu $x, z \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$, se numesc **fracţii echivalente** dacă $xt = yz$. Dată o fracţie $\frac{x}{y}$, se obţin fracţii echivalente cu ea prin:

i) **amplificare**: ${}^{t)}\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$;

ii) **simplificare**: $\frac{x}{y}^{(t} = \frac{x : t}{y : t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$, $y, t \in \mathbb{Z}^*$ şi $t \mid x$, $t \mid y$.

c) O **fracţie** $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ este **ireductibilă** dacă $(x, y) = 1$.

Un **număr raţional** care este **reprezentat** de o fracţie $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, se scrie sub formă **zecimală** împărţind numărătorul x la numitorul y.

În funcţie de factorii în care se descompune numitorul fracţiei ireductibile $\frac{x}{y}$, fracţia zecimală poate fi:

i) **fracţie zecimală finită**, dacă în descompunerea numitorului apar **factori** de **2** sau de **5**;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori** primi conţine **alţi** factori decât **2** şi **5**;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conţine atât factori de 2 sau/şi numai factori de 5, cât şi un alt factor prim.

Reciproc: Dacă un număr raţional este reprezentat printr-o **fracţie zecimală**, el poate fi scris sub formă de **fracţie ordinară** folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracţie zecimală:

i) **fracţie zecimală finită**: $\overline{a,b_1b_2b_3...b_n} = \dfrac{\overline{ab_1b_2b_3...b_n}}{10^n}$;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**: $\overline{a,(b_1b_2b_3...b_n)} = a\dfrac{\overline{b_1b_2b_3...b_n}}{\underbrace{99...9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**:

$$\overline{a,b_1b_2...b_n(c_1c_2...c_m)} = \frac{\overline{ab_1b_2...b_nc_1c_2...c_m} - \overline{ab_1b_2...b_n}}{\underbrace{999...9}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{000...0}_{\text{de } n \text{ ori}}}.$$

d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, avem $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$, $x : y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$, $x^y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

Mulţimea numerelor iraţionale, notată cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este mulţimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinitate** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

Mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$, este mulţimea formată din **reuniunea** mulţimii numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale. În mod asemănător, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Avem **şirul incluziunilor**: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$; e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

f) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$; g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; h) $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$; i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;

k) $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; l) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; m) $\varnothing \subseteq \mathbb{Q}$; n) $\varnothing \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$; o) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $8 \in \mathbb{N}$; b) $8 \in \mathbb{Z}$; c) $8 \in \mathbb{Q}$; d) $8 \in \mathbb{R}$; e) $-6 \in \mathbb{Z}$;

f) $-6 \in \mathbb{N}$; g) $-\dfrac{7}{3} \in \mathbb{Q}$; h) $-8{,}3 \in \mathbb{R}$; i) $-\dfrac{9}{3} \in \mathbb{Z}$; j) $4{,}(5) \in \mathbb{Q}$;

k) $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$; l) $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\sqrt{25-(-3)\cdot(-8)} \in \mathbb{N}$; n) $[-(-3) + (-2)]^2 \in \mathbb{Z}$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{2\dfrac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{0,(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} \in \mathbb{Z}$;

d) $0,(3) + \sqrt{0,(4)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; e) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} \in \mathbb{N}$; f) $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 + 3\sqrt{144}} \in \mathbb{Z}$;

g) $\{0\} \in \mathbb{R}$; h) $0 \notin \mathbb{R}^*$; i) $\{0\} \subset \mathbb{R}$; j) $2 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 2\}$.

PE-PP **Recapitulare şi sistematizare prin teste**

TESTUL 1

1. Efectuaţi:

a) $(-3; 3) \cup (-5; 0)$; b) $(-2; 3) \cap [-1; 5]$; c) $(-\infty; 2] \cap (-3; 6)$;

d) $[-5; 4) \cup (0; +\infty)$; e) $(-1; 4] \cap \mathbb{N}^*$; f) $(-4; 2) \cap \mathbb{Z}^*$.

2. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 5\}$.

a) Scrieţi mulţimea A sub formă de interval.

b) Calculaţi $A \cap \mathbb{Z}^*$.

c) Calculaţi $A \cup \{-4; -2; -1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.

3. Arătaţi că $a \in [0,(2); 0,(3)]$, unde $a = \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{17\cdot 18}$.

4. Se consideră mulţimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -4 \le \frac{5x+7}{2} < 16\right\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \le \frac{7x+12}{9} \le 6\right\}$.

Calculaţi $A \cap B \cap \mathbb{N}$ şi $A \cup B \cap \mathbb{Z}$.

5. Stabiliţi cărui interval îi aparţine fiecare dintre numerele reale a, b şi c care satisfac relaţia $(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 3)^2 = 25$.

TESTUL 2

1. Efectuaţi:

a) $[-7; 2) \cup [-3; 7]$; b) $[-5; 3) \cap (-3; 8]$; c) $(-\infty; 3] \cap [-3; +\infty)$;

d) $[-6; 4) \cup (-1; +\infty)$; e) $(-2; 3] \cap \mathbb{N}^*$; f) $(-5; 2] \cap \mathbb{Z}^*$.

2. Se consideră mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -5 \le \frac{6x-2}{4} < 7\right\}$.

a) Scrieţi mulţimea A sub formă de interval.

b) Calculaţi suma dintre cel mai mare număr negativ ce nu este în interval şi cel mai mare număr întreg din interval.

c) Calculaţi $A \cup \{-2; -1; 1; 2; 4; 5; 6; 7\}$.

d) Calculaţi $A \cap (0; 6) \cap \mathbb{N}$.

3. Arătaţi că numărul $a = \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 8} + \frac{4}{8\cdot 12}$ aparţine intervalului $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

4. Dacă numerele reale a şi b îndeplinesc condiţia $(a + 4)^2 + (b - 5)^2 = 9$, arătaţi că $a < b$.

5. Se consideră numerele reale x şi y, astfel încât $x \in [-2; 1]$ şi $x + 2 = 3y$. Determinaţi valoarea numărului real p, unde $p = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

PE-PP

6. Inecuaţii de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $>$, $<$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

O propoziţie cu o variabilă care conţine în scrierea sa unul dintre semnele: $\geq$, $\leq$, $>$ sau $<$ este o **inecuaţie**. Litera care apare ca variabilă se numeşte **necunoscută**.

Atribuind variabilei diverse valori, se obţin propoziţii adevărate sau false. Numerele pentru care propoziţia este adevărată se numesc **soluţii** ale inecuaţiei.

A rezolva o inecuaţie înseamnă a afla toate soluţiile acesteia, care sunt cuprinse în **mulţimea soluţiilor**.

Două inecuaţii sunt **echivalente** dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Observaţii:

În rezolvarea inecuaţiilor se folosesc următoarele proprietăţi ale inegalităţilor între numere:

1) Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$ şi $a - c < b - c$.
2) Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ şi $a : c < b : c$.
3) Dacă $a < b$ şi $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$ şi $a : c > b : c$.
4) Dacă $b < a$, se poate scrie şi $a > b$.

Aceleaşi proprietăţi sunt valabile şi dacă înlocuim $<$ cu semnul $\leq$, iar semnul $>$ cu $\geq$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Fie mulţimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aflaţi ce elemente ale mulţimii A sunt soluţii ale următoarelor inecuaţii:

a) $2(x + 3) \leq 8$; b) $3x - 2(x + 1) \leq -3$;
c) $2|x| + 3 \leq 5$; d) $3x + 2 \geq 5$.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $4x - 10 < 30$; b) $6x - 12 \leq 30$; c) $-3x + 7 \geq -5$;
d) $-3x + 2 \geq -7$; e) $2x + 1 \leq 11$; f) $-5x + 4 \leq -16$;
g) $6x + 11 < -7$; h) $7x - 12 \geq 30$; i) $2x - 5 \leq 7$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $2(x + 3) < x - 5$; b) $3(x - 2) > 2(x + 1)$; c) $2(x - 4) \geq 3(x - 1)$;
d) $3(x - 2) \geq x + 8$; e) $7x + 4 < 3(x + 8)$; f) $5(x + 1) \leq 3(x + 3)$;
g) $3(x - 1) > 2x + 9$; h) $6(x - 1) > 4(x + 2)$; i) $7(x + 3) \leq 5(x - 1)$.

4. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care inecuaţiile sunt adevărate:

a) $\frac{3}{x-1} < 0$; b) $\frac{-2}{x+2} > 0$; c) $\frac{-5}{3x+1} < 0$;
d) $\frac{7}{2x-5} > 0$; e) $\frac{-1}{3x+7} \leq 0$; f) $\frac{4}{2x-1} \geq 0$;
g) $\frac{-8}{-5x+1} > 0$; h) $\frac{-2}{-3x+5} \leq 0$; i) $\frac{-7}{-x+4} \geq 0$.

PE

Nume ________________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi propoziţii adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Numerele naturale soluţii ale inecuaţiei $3x + 4 < 2(x + 5)$ sunt { .... }.

(0,5p) **2.** Numerele întregi soluţii ale inecuaţiei $\sqrt{x^2} \leq 2$ sunt { .... }.

(0,5p) **3.** Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $3x + \sqrt{x^2} \leq 3(x+1)$ este $S =$ ....

(0,5p) **4.** Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\left|x + \sqrt{3}\right| < \sqrt{3} + 1$ este $S =$ ....

(0,5p) **5.** Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x + 5| \cdot [2(x - 5) - (x - 3)] < 0$ este $S =$ ....

(0,5p) **6.** Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2x - 4 \leq 4x$ este $S =$ ....

II. Încercuiţi răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x(2x + 3) < 2x(x + 4) + 10$ este:

A. $(-\infty; 2)$ B. $(-\infty; -2)$ C. $(-2; +\infty)$ D. $(-1; +\infty)$

(0,5p) **2.** Numerele naturale soluţii ale inecuaţiei $|x| \cdot (|x - 3| - 2) < 0$ sunt:

A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$

(0,5p) **3.** Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\sqrt{x^2 + 5} \cdot (x + 4) \geq 0$ este:

A. $(-\infty; -4]$ B. $[-4; +\infty)$ C. $[4; +\infty)$ D. $(-\infty; 4]$

(0,5p) **4.** Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2x + |x + 3| < 2(x + 1)$ este:

A. $(-4; -2)$ B. $(-3; -4)$ C. $(-5; -1)$ D. $(-4; -2)$

III. Scrieţi rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Rezolvaţi inecuaţia $2x + 1 + 2|x + 2| \leq 2x + 7$.

(1p) **2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $|x+1|\cdot\left(\left|\frac{2x+1}{3}\right|-1\right)<0$.

(1p) **3.** Determinaţi numerele naturale care sunt soluţii ale inecuaţiei:

$$(x^2+9)[3(x-1)-2(x+1)]\le 0.$$

(1p) **4.** Rezolvaţi inecuaţia $x\left(\sqrt{3}-2\right)\le 2\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul II
Calcul algebric în $\mathbb{R}$

PP Competenţe specifice

- **C1.** Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- **C2.** Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- **C3.** Utilizarea formulelor de calcul prescurtat şi a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
- **C4.** Exprimarea matematică a unor situaţii concrete prin calcul algebric
- **C5.** Interpretarea unei situaţii date utilizând calcul algebric
- **C6.** Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuaţiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

A. Operaţii cu numere reale reprezentate prin litere

Definiţie. Se numeşte **expresie algebrică** o succesiune de numere şi/sau litere legate între ele prin operaţii aritmetice (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere).

Exemple: 7, x, $7x$, $7\sqrt{3}x$, $7\sqrt{3}x-8y^2$.

Observaţii:

a) **Cea mai simplă** expresie algebrică obţinută doar prin înmulţire cu numere şi/sau litere se numeşte **termen** al expresiei algebrice.

Exemple: 7, x, xy, $8z^2y^3$.

b) **Numărul** care apare în scrierea unui termen al unei expresii algebrice se numeşte **coeficientul** termenului.

Exemple: $-7xy^2$ are coeficientul -7, $18\sqrt{3}x^2z$ are coeficientul $18\sqrt{3}$, $-0,(7)zt^2$ are coeficientul $-0,(7)$.

c) **Literele** care intră în scrierea unui termen alcătuiesc **partea literală** a sa.
Exemple: $-81x$ are partea literală x, $-8x^2y^3z$ are partea literală x^2y^3z.

d) Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleaşi **operaţii** care se efectuează cu numerele reale: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere. Aceste operaţii au **aceleaşi proprietăţi** pe care le au operaţiile cu numere reale.

PE-PP 1. Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Definiţie. Se numesc **termeni asemenea** acei termeni care conţin aceeaşi succesiune de litere la aceiaşi exponenţi.

Exemple: a) $-3x+9+6x$, termenii asemenea sunt $-3x$ şi $6x$;

b) $7\sqrt{5}+11a-7x^3z+2\sqrt{5}+\frac{3}{5}x^3z$, termenii asemenea sunt $7\sqrt{5}$ şi $2\sqrt{5}$, respectiv $-7x^3z$ şi $\frac{3}{5}x^3z$.

Observaţii:

a) **Adunarea sau scăderea** a doi termeni asemenea este operaţia prin care se obţine un termen asemenea cu cei iniţiali, iar coeficientul noului termen se obţine efectuând operaţiile algebrice indicate asupra celor doi coeficienţi ai termenilor iniţiali.

b) **Operaţiile** de adunare şi scădere efectuate cu **termeni asemenea** se numesc operaţii de **reducere** a termenilor asemenea.

Exemple: i) $7x+5x=12x$; ii) $-7xy+2xy=-5xy$; iii) $-3x^2-8x^2=-11x^2$.

c) O **expresie algebrică** este considerată a fi scrisă în **forma canonică** dacă nu conţine termeni asemenea.

d) **Produsul** dintre un număr real şi o expresie algebrică se efectuează înmulţind acest număr cu fiecare coeficient al termenilor ce compun expresia algebrică, cu respectarea regulilor de calcul cu numere reale.

Exemplu: $3(2x^2-5x+5)-(4x^2+3x+3y)-4(x+y)=6x^2-15x+15-4x^2-3x-3y-$
$-4x-4y=2x^2-22x-7y+15$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Efectuaţi:

a) $4x-3x+5x$; b) $7x^2-3x^2+3x^2$; c) $2ab-5ab$;
d) $9x^2-11x^2-9x^2$; e) $-4{,}2y-1{,}8y$; f) $0{,}3a-0{,}7a$;
g) $\frac{2}{7}a^2-\frac{3}{7}a^2-\frac{a^2}{7}$; h) $\sqrt{3}x-2\sqrt{3}x$; i) $2\sqrt{5}xy-7\sqrt{5}xy$;
j) $8abc-11abc$; k) $y^2+13y^2-5y^2$; l) $4x^2y^2-7x^2y^2+3x^2y^2$.

2. Reduceţi termenii asemenea:

a) $7x+2y-4z-5x+6y+3z$; b) $3a-9b+2a+7b-4a-5b$;
c) $8x-3y-5z-9x-4y+3z$; d) $13x^2-2x+4x^2-11x-15x^2+13x$;
e) $17xy-21x^2y-12xy+23x^2y-2x^2y$; f) $7x-9-11x+12+4x$.

3. Scrieţi în spaţiul punctat termenul corespunzător obţinerii unei propoziţii adevărate:

a) $18x-16x+\ldots+5x=24x$; b) $16x-23x+\ldots+6x=18x$;
c) $10a+14a-\ldots+12a=15a$; d) $4x^2-5x^2+\ldots+18x^2=0$;
e) $11xy-7xy+\ldots-8xy=21xy$.

TESTUL 3

1. Descompuneţi:

a) $x^2 - 17x + 72$; b) $x^2 - 4x - 21$; c) $x^2 - 7x - 18$;

d) $\left(x-\sqrt{3}\right)^2 - 48$; e) $\left(\sqrt{2}x-3\right)^2 - 32x^2$; f) $(4x + 3)^2 - 24x - 18$;

g) $(2x + 3)^2 - 10x - 15$; h) $4x^3 + 4x^2 - x - 1$; i) $9x^3 + 9x^2 - 4x - 4$.

2. Dacă $3x + 2y = 5$ şi $9x^2 - 4y^2 = 20$, calculaţi valoarea numărului:

$$n = (3x - 2y) + (3x - 2y)^2 + (3x - 2y)^3 + (3x - 2y)^4.$$

3. a) Stabiliţi natura triunghiului de laturi a, b şi c, care îndeplinesc condiţia:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

b) Determinaţi valoarea reală a numărului x pentru care valoarea expresiei $4x^2 + 12x + 21$ este minimă.

c) Arătaţi că numărul $a = (x + 6)(x - 1) + x + 15$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

4. Dacă $a, b, c, t \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = t^4$, arătaţi că:

$$\sqrt{(t^4+a^4)(t^4+b^4)(t^4+c^4)} \in \mathbb{Q}.$$

5. Descompuneţi în factori:

a) $4(5x - 3)^2 - 9(3x - 4)^2$; b) $x^4 - x^2 - 4x - 4$; c) $(4x - 3)^2 - (2x + 1)^2$;

d) $x^2 - 2x - 15$; e) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 6) - 16$; f) $x^2 + 6x - 40$;

g) $(x^2 + x)(x^2 + x - 8) + 12$; h) $(x^2 + x)(x^2 + x - 4) - 5$; i) $(x^2 - x)(x^2 - x + 7) - 18$;

j) $x^3 + 7x^2 - 18x$; k) $x^4 - x^2 + 1$; l) $x^3 - 4x^2 - 12x$.

B. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

PE-PP 7. Amplificarea. Simplificarea

Un raport în care termenii sunt expresii algebrice se numeşte **raport algebric** sau **fracţie algebrică** sau **expresie algebrică raţională**.

Exemple: a) $\dfrac{a^2+7}{15}$; b) $\dfrac{5}{3x}$; c) $\dfrac{5a-3y}{5x-6}$; d) $\dfrac{x-\sqrt{5}}{x+11}$.

Domeniul de definiţie al unei fracţii algebrice este mulţimea numerică în care iau valori literele ce participă în partea literală a expresiilor algebrice care intră în scrierea numărătorului şi a numitorului fracţiei raţionale, cu excepţia acelor valori ale literelor care anulează numitorul.

Exemple: Pentru $\dfrac{5a-3y}{5x-6}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{6}{5}\right\}$, iar pentru $\dfrac{x-\sqrt{5}}{x+11}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-11\}$.

Observaţie: Un raport algebric nu este definit pentru acele valori ale literelor care anulează numitorul.

Operaţia de **amplificare** a unei fracţii algebrice constă în înmulţirea atât a numărătorului, cât şi a numitorului acesteia cu o expresie algebrică nenulă.

Exemple: Raportul $\dfrac{3x}{x^4+2}$, $x \in \mathbb{R}$, amplificat cu x^2+1 devine $\dfrac{3x\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+2\right)\left(x^2+1\right)}$.

Operaţia de **simplificare** a unei fracţii algebrice constă în împărţirea atât a numărătorului, cât şi a numitorului acesteia prin aceeaşi expresie algebrică nenulă.

Exemple: a) $\frac{144x^2}{156x^3}, x \in \mathbb{R}^*$, se simplifică prin $12x^2$ şi devine $\frac{12}{13x}$;

b) $\frac{13x-13\sqrt{5}}{x^2-5},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$. Raportul simplificat se obţine astfel:

$$\frac{13\left(x-\sqrt{5}\right)}{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)} = \frac{13}{x+\sqrt{5}}.$$

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care următoarele fracţii nu sunt definite:

a) $\frac{3}{x}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{13x^2}$; c) $\frac{x+1}{16x^2}$; d) $\frac{x+4}{x^2+1}$;

e) $\frac{5x-2}{5x+2}$; f) $\frac{3x}{x-1}$; g) $\frac{5}{x^2-1}$; h) $\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$;

i) $\frac{3x-5}{x^2+3x+2}$; j) $\frac{2x+3}{x(x+1)(x-3)}$; k) $\frac{7x+3}{4x^2-9}$; l) $\frac{xy+z}{x^2-3x+2}$.

2. Determinaţi domeniul de definiţie pentru următoarele fracţii algebrice:

a) $\frac{5}{x}$; b) $\frac{7x+1}{9x^2}$; c) $\frac{3x+2}{x-1}$; d) $\frac{x-3}{x^2+4}$; e) $\frac{7x-3y}{x(x+1)}$;

f) $\frac{2x+3}{x^2-1}$; g) $\frac{3x-7}{x^2-3}$; h) $\frac{2x+1}{x^2+5x+6}$; i) $\frac{12}{x^2-4x+4}$; j) $\frac{13x^2}{x(x+1)(x-4)}$.

3. Calculaţi valorile pe care le iau rapoartele:

a) $\frac{x-7}{1+x+2x^2}$, pentru $x = 7$; b) $\frac{x-3}{2x^2+5}$, pentru $x \in \{1, 3\}$;

c) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2+4}$, pentru $x = 2, y = 2$; d) $\frac{x+y}{x^2+y^2+1}$, pentru $x \in \{0, 1\}, y \in \{-1, 1\}$;

e) $\frac{3x+2y-5z}{x^2+y^2+z^2+11}$, pentru $x = 1, y = -1, z = 0$.

4. (i) Amplificaţi cu $x \in \mathbb{R}^*$ rapoartele: a) $\frac{11}{x}$; b) $\frac{12}{x^2}$; c) $\frac{11x-3}{x^2+1}$; d) $\frac{8-x}{x^4+x^2+2}$.

(ii) Amplificaţi cu $2x + 3$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, rapoartele:

a) $\frac{11}{13x}$; b) $\frac{7}{x+1}$; c) $\frac{7-x}{x^2+3x+2}$; d) $\frac{2x-3}{4x^2+x}$.

Geometrie

Capitolul I
Elemente ale geometriei în spaţiu

PP **Competenţe specifice**

- **C_1.** Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configuraţii spaţiale date
- **C_2.** Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configuraţii spaţiale date
- **C_3.** Folosirea unor proprietăţi de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea poziţiilor relative ale dreptelor şi planelor
- **C_4.** Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configuraţii geometrice
- **C_5.** Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configuraţii spaţiale şi a calculării unor elemente metrice
- **C_6.** Modelarea unor situaţii practice în limbaj geometric, utilizând configuraţii spaţiale

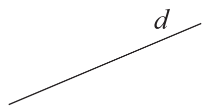
PE-PP 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

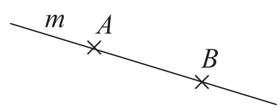
Punctul, **dreapta** şi **planul** fac parte din noţiunile de bază ale geometriei în spaţiu. Ele sunt noţiuni primare: nu se definesc, dar pot fi descrise.

Punctul. Se reprezintă prin atingerea vârfului unui creion bine ascuţit de foaia de scris: •, ×. Se notează cu litere mari: A, B, C, … .

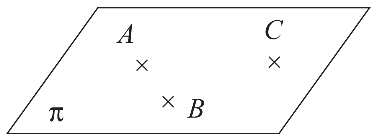
Dreapta. Este formată din puncte şi se reprezintă printr-un fir de aţă foarte subţire întins la nesfârşit în ambele sensuri. Se notează cu litere mici: a, b, d, … .

Dacă punctele A şi B sunt pe o dreaptă, atunci se poate nota dreapta cu AB.



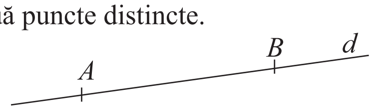


Planul. Poate fi asemănat cu suprafaţa liniştită a unei ape. De asemenea, planul este nesfârşit în toate direcţiile. Se notează cu litere din alfabetul grec: α, β, γ, π, … . Un plan care conţine trei puncte necoliniare A, B şi C se notează prin (ABC). Planul se reprezintă printr-un paralelogram.

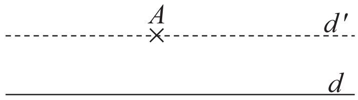


Propoziţii despre puncte, drepte şi plane

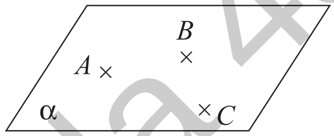
P₁. (**Axioma dreptei**) Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una. Orice dreaptă are cel puţin două puncte distincte.



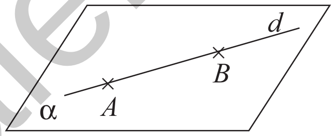
P₂. (**Axioma paralelelor** sau **postulatul lui Euclid**) Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la acea dreaptă.



P₃. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan şi numai unul care să le conţină. Orice plan conţine cel puţin trei puncte necoliniare.

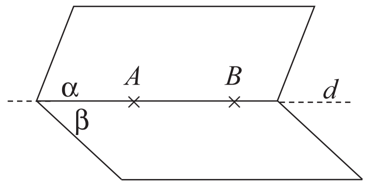


P₄. Dacă două puncte distincte aparţin unui plan, atunci dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

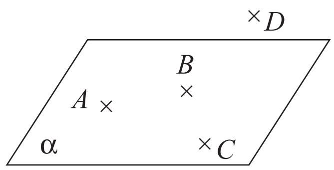


P₅. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puţin încă un punct comun.

Consecinţă: Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



P₆. Există patru puncte nesituate în acelaşi plan (acestea se numesc **necoplanare**).



● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

a) Trei puncte necoliniare determină un …………….. .

b) Prin două puncte distincte trece o …………….. şi numai una.

c) Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o …………….. comună.

d) Patru puncte necoplanare determină un număr de …………….. drepte.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziţii:

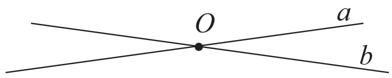
a) Oricare trei puncte sunt coplanare.

PE-PP

4. Poziţiile relative a două drepte în spaţiu; relaţia de paralelism în spaţiu

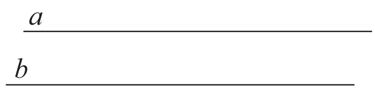
Definiţie. Două drepte care au **un singur punct** comun se numesc **drepte concurente.**

$a \cap b = \{O\}$



Definiţie. Două drepte din acelaşi plan care nu au niciun punct comun se numesc **drepte paralele.**

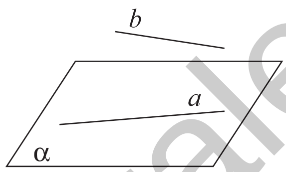
$a \cap b = \varnothing$



Definiţie. Două drepte situate în **acelaşi plan** se numesc **drepte coplanare.**

Definiţie. Două drepte care **nu au niciun punct comun şi nu sunt paralele** se numesc **drepte necoplanare.**

$a \cap b = \varnothing$ şi $a \nparallel b$



Tranzitivitatea relaţiei de paralelism în spaţiu

Dacă două drepte distincte a şi b sunt paralele cu o a treia dreaptă c, atunci dreptele a şi b sunt paralele între ele.

$$\left.\begin{matrix} a \parallel c \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Două drepte paralele sunt coplanare.

b) Două drepte necoplanare nu sunt concurente.

c) Două drepte necoplanare pot fi paralele.

2. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsurile corecte:

a) Dacă punctele A, B şi C nu sunt coliniare, atunci dreptele AB şi BC sunt ....

b) Dacă punctele A, B, C, D sunt necoplanare, atunci dreptele AC şi BD sunt ....

3. În cubul $ALGEBRIC$, precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

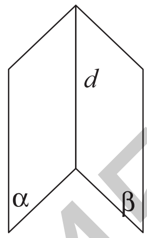
a) Dreptele AB şi LR sunt paralele. b) Dreptele AL şi EC sunt coplanare.

c) Dreptele LI şi AC sunt paralele. d) Dreptele BC şi LG sunt necoplanare.

4. Dacă dreapta g este coplanară cu dreapta h, iar dreapta h este coplanară cu dreapta d, atunci dreptele g şi d sunt coplanare?

PE-PP

13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane



Definiţie. Reuniunea punctelor unei drepte d cu punctele a două semiplane mărginite de dreapta d se numeşte **unghi diedru**.

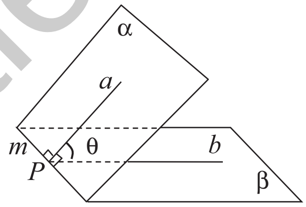
Observaţie: **Dreapta** comună celor două semiplane se numeşte **muchia diedrului**, iar cele două semiplane se numesc **feţele diedrului**.

Definiţie. Se numeşte **unghi plan corespunzător unghiului diedru** orice unghi format din două semidrepte, a, b, care au originea într-un punct $P \in d$, sunt conţinute respectiv în cele două semiplane ce formează diedrul şi sunt perpendiculare pe d.

Observaţie: Pentru poziţii diferite ale punctului P pe dreapta d, se obţin unghiuri plane congruente.

Definiţie. **Măsura** unui unghi diedru este măsura oricărui unghi plan corespunzător unghiului diedru.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = m \\ a \perp m, a \subset \alpha \\ b \perp m, b \subset \beta \\ a \cap b \cap m = \{P\} \end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(a, b) = \theta$$



Definiţie. **Măsura** unghiului dintre două plane secante este cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri diedre formate în jurul dreptei de intersecţie a celor două plane.

Observaţii:
- Măsura unghiului dintre două plane paralele este egală cu 0°.
- Măsura unghiului dintre două plane este cuprinsă între 0° şi 90°.

Definiţie. Două plane concurente sunt perpendiculare, dacă determină unghiuri diedre drepte.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Pe planul triunghiului echilateral ABC, cu AB = 24 cm, se ridică perpendiculara MA = = 12 cm.
a) Calculaţi lungimile segmentelor MB şi MC.
b) Dacă D este mijlocul segmentului BC, arătaţi că $(MAD) \perp (MBC)$.
c) Calculaţi măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de (MBC) cu (ABC).

2. Pe planul triunghiului dreptunghic şi isoscel ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ şi $BC = 24\sqrt{2}$ cm, se ridică perpendiculara MA, cu $MA = 12\sqrt{2}$ cm.
a) Calculaţi aria şi perimetrul triunghiului ABC.

PE-PP Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

A. Se scriu doar răspunsurile.

(0,5p) **1.** a) Rezultatul calculului $-3^0 + \sqrt{72} : \sqrt{18}$ este ....

(0,5p) b) Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-3; 2] \cap (-5; 0)$ este egal cu ....

(0,5p) c) Media geometrică a numerelor 0,12 şi 0,(3) este ....

(0,5p) **2.** a) Rezultatul calculului $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 - 2(x + 1)(x - 1)$ este egal cu ....

(0,5p) b) Scrisă sub formă de interval, mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \le 3\}$ este $A =$ ....

(0,5p) c) Descompunerea în factori ireductibili a expresiei $(4x - 5)^2 - 9x^2$ este ....

(0,5p) **3.** a) Cel mai mic număr natural, pentru care $\frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}$, este egal cu ....

(0,5p) b) Valoarea numărului $a = |x + 3| + |x - 7|$, pentru $x \in [-3; 7]$, este ....

(0,5p) c) Efectuând $(-5; 3] \cup [-3; 5)$, se obţine intervalul ....

4. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu latura bazei $AB = 6$ cm şi $AA' = 6\sqrt{3}$ cm.

(0,5p) a) Lungimea segmentului AD' este de .... cm.

(0,5p) b) Măsura unghiului format de AD' cu planul (ABC) este de .... °.

(0,5p) c) Măsura unghiului format de AD' cu BB' este de .... °.

B. Se scriu rezolvările complete.

(0,5p) **5.** a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia: $\frac{3x-2}{7} - \frac{2x-5}{5} > \frac{46-20x}{35}$.

(0,5p) b) Stabiliţi cărui interval aparţin numerele reale a, b şi c, pentru care avem relaţia: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(a - 2b - 3c) = 11$.

(0,5p) c) Fie mulţimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -7 < \frac{6x+10}{2} < 20\right\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|\frac{2x+1}{3}\right| \le 3\right\}$.

Determinaţi mulţimile $A \cap B$ şi $A \cup B$.

6. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată care are $AB = 10$ cm şi $SO = 5\sqrt{2}$ cm, unde $SO \perp (ABC)$.

(0,25p) a) Calculaţi măsura unghiului format de SA cu planul (SBD).

(0,25p) b) Calculaţi distanţa de la O la planul (SBC).

(0,5p) c) Dacă M este mijlocul laturii BC şi N este mijlocul muchiei SC, arătaţi că $(OMN) \parallel (SAB)$.

(0,5p) d) Calculaţi măsura unghiului dintre dreptele MN şi BD.

Probleme pentru pregătirea olimpiadei şi a concursurilor şcolare

ALGEBRĂ

1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, astfel încât numărul:

$$a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

să aparţină mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|x|<\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right\}$.

2. Determinaţi $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\dfrac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a}+\dfrac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b}\in\mathbb{Z}$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 1$. Demonstraţi că:

a) $\sqrt{a^4+4b^2}+\sqrt{b^4+4a^2}=2$;   b) $-\sqrt{2}\le a+b\le\sqrt{2}$.

4. a) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$. Atunci $a = c$ şi $b = d$.

b) Arătaţi că nu există numerele raţionale a, b, c, d, astfel încât:

$$1+\sqrt{3}=\left(a+b\sqrt{3}\right)^2+\left(c+d\sqrt{3}\right)^2.$$

5. Demonstraţi că, oricare ar fi numerele raţionale x, y, z, diferite două câte două, numărul $n \in \mathbb{Q}$, unde $n=\sqrt{\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}}$.

6. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $a=\sqrt{4n^2+20n+65}$ să fie număr natural.

7. Demonstraţi că, dacă numerele întregi x, y, z verifică relaţia $xy + z(x - y) = y^2 + 7$, atunci $|x + z| = 8$ şi $|x - 2y - z| = 6$.

8. Arătaţi că, oricare ar fi $a, b, c \ge 0$, $a \ge b$ şi $a \ge c$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a^2+4b^2-c^2+4ab}+\sqrt{a^2-b^2+4c^2+4ac}\le 2(a+b+c).$$

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \cdot b = 1$. Demonstraţi inegalitatea $(a - 3)^2 + (b - 3)^2 \ge 7$.

10. Arătaţi că, dacă x, y, z sunt numere raţionale nenule, astfel încât $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$, atunci numărul $N=\left(\dfrac{xy}{z}+1\right)\left(\dfrac{yz}{x}+1\right)\left(\dfrac{zx}{y}+1\right)$ este nenegativ, iar $\sqrt{N}\in\mathbb{Q}$.

11. Fie numerele reale distincte a şi b care au proprietăţile: $a^2 + b \in \mathbb{Q}$ şi $b^2 + a \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că:

a) numerele $a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ şi $b=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ verifică proprietăţile date;

b) dacă $a + b \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, atunci a şi b sunt numere raţionale;

GEOMETRIE

26. Pe planul triunghiului echilateral ABC de latură $2a$ se duc perpendicularele AM şi d, $C \in d$. Fie $N \in AM$, astfel încât $AN = a$ şi $MN = 2a$.

a) Justificaţi şi calculaţi distanţa de la A la planul (MBC).

b) Justificaţi şi calculaţi măsura unghiului format de planele (MBC) şi (NBC).

c) Câte puncte diferite $P_i \in d$ sunt, astfel încât ΔBMP_i să fie dreptunghic pentru orice $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$? Calculaţi de fiecare dată lungimea segmentului $[CP_i]$.

O.L. Alba, 2011

27. Segmentele AB şi CD sunt situate pe drepte necoplanare, M este mijlocul segmentului AB, iar $N \in CD$ astfel încât $CN = 3 \cdot ND$. Se notează cu X, Y, Z, T punctele $X \in CM$ cu $MX = 3 \cdot CX$, $Y \in AN$ cu $AN = 2 \cdot AY$, $Z \in MD$ cu $MZ = 3 \cdot ZD$, $T \in BN$ cu $BN = 2 \cdot BT$. Verificaţi coplanaritatea punctelor X, Y, Z, T.

O.L. Arad, 2011

28. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se duc $AQ \perp A'B$, $Q \in A'B$, $CR \perp BC'$, $R \in BC'$ şi $DP \perp BD'$, $P \in BD'$.

a) Arătaţi că $(AQP) \perp (CRP)$.

b) Dacă $QR \parallel (ABC)$, atunci $AB \equiv BC$.

prof. Sorin Peligrad, O.L. Argeş, 2011

29. În tetraedrul $ABCD$ se notează cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC, respectiv CD. Se ştie că $\sphericalangle(AC, BD) = 90°$.

a) Arătaţi că $\sphericalangle MNP = 90°$.

b) Arătaţi că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

prof. Ion Roşu, O.L. Argeş, 2011

30. Pe planul triunghiului ABC, cu laturile $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$ şi $AC = 1$, se ridică perpendiculara $AM = \sqrt{2}$.

a) Arătaţi că MC şi BC sunt perpendiculare.

b) Aflaţi măsura unghiului dintre MC şi (AMB).

O.L. Bacău, 2011

31. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm şi $AM \perp (ABC)$, cu $AM = 12\sqrt{3}$ cm. Calculaţi:

a) distanţa de la M la BC;

b) distanţa de la A la (MBC);

c) măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (MBC).

O.L. Bihor, 2011

32. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara $MA \perp (ABC)$, $AB = AM = \sqrt{2}$ cm. Fie $E \in (BC)$, astfel încât $EC = 1$ cm.

a) Arătaţi că $BD \perp MC$.

b) Calculaţi distanţa de la punctul M la dreapta DE.

c) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul (MCD).

prof. Ioan Ioja, O.L. Bistriţa-Năsăud, 2011

33. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Fie O centrul pătratului $ABCD$ şi M mijlocul segmentului AO. Planul α conţine punctul M şi este paralel cu planul $(AB'D')$.

a) Demonstraţi că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul α.

b) Dacă planul α intersectează dreptele $B'C'$ şi $D'C'$ în punctele N, respectiv P, arătaţi că punctul M este egal depărtat de planele $(A'B'C')$ şi (PNC).

O.L. Bucureşti, 2011

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUŢIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanaţi codul QR cu camera telefonului, nu din aplicaţia Mate2000+)

RECAPITULARE ŞI EVALUARE INIŢIALĂ

Teste cu exerciţii şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării iniţiale

Testul 1: **1.** a) $2\sqrt{3}$; b) –12; c) $\dfrac{7\sqrt{2}}{5}$. **2.** a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{-1, 4\}$; c) $S = \{8\}$; d) $S = \left\{\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4}\right\}$; e) $S = \{-8, 2\}$. **3.** $m_g = 6$. **4.** a) $S = \{(4, -3)\}$; b) $S = \{(3, 2)\}$. **5.** b) $AB = 3\sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$; $AC = 5\sqrt{5}$; $AC = AB + BC \Rightarrow A, B, C$ – coliniare; c) $M(2; 5)$. **6.** 420 lei. **7.** a) $\mathcal{P} = 10(3+\sqrt{3})$ cm; b) $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta ABD}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{4}$. **8.** a) Dacă $\sphericalangle BDC = 60° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 120° \Rightarrow \sphericalangle AOC = 60°$, deci ΔAOC – echilateral; $\mathcal{A}_{\Delta AOC} = 16\sqrt{3}$ cm^2.

Testul 2: **1.** a) 36; b) $3\sqrt{3}$; c) $-2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$. **2.** a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{7\}$; c) $S = \{-4, 2\}$; d) $S = \{-1, 6\}$; e) $S = \{-6, 2\}$. **3.** 320 lei. **4.** a) $S = \{(2, -3)\}$; b) $S = \{(3, 4)\}$. **5.** $m_a = 5\sqrt{6}$; $m_g = 12$. **6.** b) $AB = 5$, $AC = 5$; $BC = 5\sqrt{2}$. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. **7.** a) $BC = 24$ cm; $DM = 6$ cm $\Rightarrow BD = 6$ cm; $AB = 12$ cm şi $AC = 12\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 72\sqrt{3}$ cm^2 şi $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 12(3+\sqrt{3})$ cm; b) 25%. **8.** a) $\mathcal{A}_{\Delta CMN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\Delta MAN} - \mathcal{A}_{\Delta MBC} - \mathcal{A}_{\Delta NDC} = 950$ cm^2; b) $MN = 50$ cm; d$(C; MN) = 38$ cm; c) $\sin(\sphericalangle CNM) = \dfrac{19\sqrt{26}}{130}$.

Testul 3: **1.** a) 4; b) 1; c) 128. **2.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{4\}$; c) $S = \{1, -2\}$; d) $S = \left\{-\dfrac{10}{3}, 4\right\}$; e) $S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 2\right\}$. **3.** 35 ani (mama); 14 ani (fiul). **4.** a) $S = \{(-2, -3)\}$; b) $S = \{(2, -1)\}$. **5.** $a = 24$; $b = 6$; $m_a = 15$; $m_g = 12$. **6.** b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 48$ (u^2); $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 32$ (u). **7.** a) Se arată că $\sphericalangle B = 60°$. Dacă $CE \perp AB \Rightarrow CE = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 108\sqrt{3}$ cm^2; b) Se calculează $\mathcal{A}_{\Delta BDC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\Delta ADB} = 36\sqrt{3}$ cm$^2 \Rightarrow$ d$(D; BC) = 6\sqrt{3}$ cm; c) Cum $DC \parallel AB$ şi $DC = \dfrac{AB}{2}$, atunci CD este linie mijlocie în $\Delta MAB \Rightarrow MD = DA = 12$ cm şi $MC = BC = 12$ cm, deci ΔMAB – echilateral; $\mathcal{A}_{\Delta MAB} = 144\sqrt{3}$ cm^2. **8.** a) $\overset{\frown}{AC} = 60° \Rightarrow \sphericalangle ABC = 30° \Rightarrow AM = 10$ cm; $BC = 20\sqrt{3}$ cm; $R = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}} \Rightarrow R = 20$ cm; b) $MA' = 30$ cm $\Rightarrow BA' = CA' = 20\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABA'C} = \dfrac{BC \cdot AA'}{2} = 400\sqrt{3}$ cm^2; $\mathcal{P}_{ABA'C} = 40(\sqrt{3}+1)$ cm.

Testul 4: **1.** a) $-16\sqrt{3}$; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $20\sqrt{2}$. **2.** $a = \dfrac{4}{3}$; $b = \dfrac{4}{3}$; $m_g = \dfrac{4}{3}$. **3.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \left\{-\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\right\}$; d) $S = \{-6, 2\}$; e) $S = \{-6, 7\}$. **4.** 36 ani; 12 ani; peste 12 ani. **5.** a) $S = \{(-3, -4)\}$; b) $S =$

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAŢII ÎN $\mathbb{R}$

1. Mulţimi de numere. Forme de scriere a unui număr

1. Adevărate: a), b), d), f), h), j), k), l), m); false: c), e), g), i), n), o). **2.** Adevărate: a), b), c), d), e), g), h), i), j), k), l), m), n); false: f). **3.** Adevărate: a), b), e), g), h), i); false: c), d), f), j). **4.** a) F. Contraexemplu: $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 12$; b) A; c) A; d) A; e) F. $\left(3+\sqrt{5}\right)^2 = 14+6\sqrt{5}$; f) A. **5.** $\frac{60}{100}$; $\frac{72}{100}$; $\frac{60}{100}$; $\frac{175}{100}$. **6.** $a = 60$. **7.** a) $\frac{6}{10}; \frac{9}{15}; \frac{12}{20}; \frac{30}{50}$; b) $\frac{4}{8}; \frac{12}{16}; \frac{20}{24}; \frac{52}{396}; \frac{32}{52}; \frac{20}{44}$; c) $\frac{1}{4}; \frac{3}{6}; \frac{2}{35}; \frac{4}{9}; \frac{5}{22}; \frac{6}{17}$. **8.** (i) $\frac{1}{2}; \frac{61}{37}; \frac{4}{21}; \frac{8}{15}; \frac{19}{72}$; (ii) $\frac{1}{2}; \frac{2}{6}; \frac{55}{1133}; \frac{4}{21}; \frac{3}{9}; \frac{8}{15}; \frac{35}{56}; \frac{19}{72}$; (iii) $\frac{61}{37}; \frac{85}{15}$; (iv) $\frac{14}{2\cdot 7}; \frac{4\cdot 3\cdot 5}{60}$. **9.** a) (i) $x \in \{4, 5, 7, 11\}$; (ii) $x \in \{0, 1, 3, 4, 5, 8\}$; (iii) $x \in \{1, 2, 3, 8\}$; (iv) $x \in \{0, 1, 3, 10\}$; b) $x \in \{0, 2\}$; c) $x \in \{2, 6\}$. **10.** 0,8; 2,56; 0,3125; 0,136; 4,(3); 0,5(3); 1,8(6); 2,8(3); 1,9(4). **11.** $\frac{83}{20}; \frac{24}{11}; \frac{39}{110}; \frac{1267}{500}; \frac{319}{900}; \frac{28}{15}; \frac{277}{20}; \frac{181}{36}; \frac{401}{400}; \frac{1}{125}; \frac{601}{300}$. **12.** $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $C = \{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $D = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; $E = \{9, 16, 25, 36, 49\}$; $F = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$. **13.** $B = \{0, -0{,}6, 0{,}6, 5, -5\}$. **14.** a) A; b) A; c) F. **15.** a) F; b) A; c) F. **16.** $A = \left\{4, \frac{1}{9}, \frac{3}{10}, \frac{5\sqrt{2}}{3}, 1, 3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{3}}{5}, -2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$; $A \cap \mathbb{N} = \{1, 4\}$; $A \cap \mathbb{Z} = \{-2, 1, 4\}$; $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-2, 1, 4, \frac{1}{9}, \frac{3}{10}\right\}$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{\frac{1}{9}, \frac{3}{10}\right\}$; $A \cap \mathbb{R} = A$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left\{\frac{5\sqrt{2}}{3}, 3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{3}}{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$. **18.** a) A; b) A; c) A; d) A; e) A; f) A. **19.** a) $u(5n + 3) \in \{3, 8\} \Rightarrow 5n + 3 \neq k^2$; b) $u(5n + 8) \in \{3, 8\} \Rightarrow 5n + 8 \neq k^2$; c) Orice pătrat perfect este de forma $7k$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 7n + 3 \neq x^2$; d) $n^2 < n^2 + n < (n + 1)^2$, de unde $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$, adică $\sqrt{n^2+n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; e) Analog d), $4n^2 < 4n^2 + n < 4n^2 + 4n + 1$, adică $2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1$, aşadar $\sqrt{4n^2+n}$ este între doi întregi consecutivi, deci iraţional; f) Ultima cifră este 3; g) Ultima cifră este 3; h) Ultima cifră este 3; i) Ultima cifră este 2. **20.** $1 \in \mathbb{Q}$; $3-\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **21.** $x = 441$; a) A; b) F; c) A; d) A. **22.** $x = 27$; a) A; b) F; c) A; d) F. **23.** $x = 2010$; a) A; b) A; c) F; d) A. **24.** a) $A = \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\}$; b) $B = \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$; c) $C = \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$. **25.** $\overline{ab} = 65$. **26.** a) $a = 3^n \cdot 2^n$; b) $n = 3$. **27.** a) $x = 7$; b) $x = 8$; c) $x = 0$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **28.** a) $a = 2$; $b = -5$; b) $a = -1$; $b = 8$; c) $a = -6$; $b = 16$. **29.** Fie $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$. Cum $11r \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \mid 11$ şi, analog, $13r \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \mid 13 \Rightarrow q = 1$, deci $r = p \in \mathbb{Z}$.

GEOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

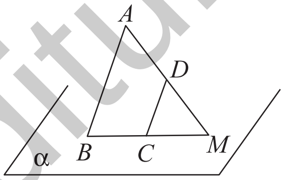
1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

1. a) plan; b) dreaptă; c) dreaptă; d) 6. **2.** a) A; b) A; c) A; d) A. **3.** AB, AC, AE, BC, BD, DE. **4.** a) 6; b) 4; c) 6. **5.** a) o infinitate; b) o infinitate. **6.** a) 8 drepte; b) $(MAB) \cap \alpha = AB$; $(DBC) \cap \alpha = BC$; $(MAC) \cap \alpha = AC$; c) $(BDC) \cap (MAC) = DC$. **7.** a) AB, AC, AD, BC, BD, DC; deci, 6 drepte; b) $BC = \dfrac{2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}}{d(A, BC)} = 12$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta BCD} = 90$ cm^2. **8.** a) $\mathcal{A}_{\Delta DAM} = 72\sqrt{5}$ cm^2; b) $MN = 4\sqrt{15}$ cm. **9.** Se arată că ΔMAD este dreptunghic, $\sphericalangle M = 90°$; $\mathcal{A}_{\Delta MAD} = 18\sqrt{2}$ cm^2. **10.** Se arată că ΔMAN este dreptunghic, $\sphericalangle MAN = 90°$; $\mathcal{A}_{\Delta MAN} = 36\sqrt{5}$ cm^2. **11.** $\mathcal{A}_{\Delta MAD} = 24$ cm^2. **12.** a) 6 drepte; b) 15 drepte. **13.** a) 8 drepte; b) 10 drepte. **14.** Dacă cele 5 puncte coplanare sunt coliniare, se determină 6 drepte. Dacă din cele 5 puncte, doar 4 sunt coliniare, atunci se determină 10 drepte. Nu se pot obţine 9 drepte.

2. Determinarea planului

1. (ABC), (ABD), (ACD), (BCD). **2.** a) A; b) A; c) F. **3.** Din prima secundă. **4.** a) (MAB), (MAC), (MAD), (MBC), (MBD), (MCD), (ABC); b) $(MAD) \cap (ABC) = AD$; $(MAC) \cap (MBD) = MO$; $(MAC) \cap (MBC) = MC$. **5.** a) A; b) A; c) F; d) A; e) F. **6.** a) (ABC), (ABN), (ABD), (ACD), (ACM), (AMN), (BCD); b) $(AMN) \cap (BCD) = MN$; $(ADC) \cap (AMN) = AN$; $(AMN) \cap (ABD) = AM$. **7.** a) $(ABC) \cap \alpha = BC$; $M \in AD \subset (ABC)$; $M \in \alpha \Rightarrow M \in BC$; b) $\Delta MDC \sim \Delta MAB \Rightarrow MA = 48$ cm şi $MB = 60$ cm; $\mathcal{P}_{\Delta MAB} = 132$ cm (*fig. 1*). **8.** a) $EF \cap \alpha = \{P\}$; $P \in EF \subset (ABC)$; $P \in \alpha$; cum $(ABC) \cap \alpha = BC \Rightarrow P \in BC$; b) $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ – dreptunghic, $\sphericalangle A = 90° \Rightarrow EF = 10$ cm (cu teorema lui Pitagora în ΔAEF); $\mathcal{P}_{BCFE} = 92$ cm (*fig. 2*). **9.** $(MQT) \cap (NRP) = RT$ (*fig. 3*). **10.** a) $M \in BC \subset (ABC)$ şi $M \in \alpha$. Cum $(ABC) \cap \alpha = AD \Rightarrow M \in AD$ (*fig. 4*); b) Se observă că DC este linie mijlocie în ΔMAB, deci $AD = DM = 15\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta MAB} = 450\sqrt{3}$ cm^2. **11.** Pot determina un plan sau maxim 7 plane. **12.** a) MA; MB; MC; MD; ME; MF; AB; AC; AD; AE; AF; BC; BD; BE; BF; CD; CE; CF; DE; DF; EF; b) 16 plane. **13.** a) 5; b) 10.

Fig. 1



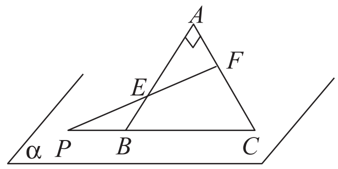
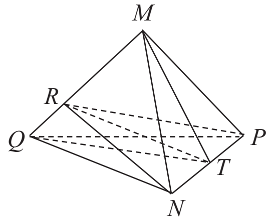


Fig. 2

Fig. 3



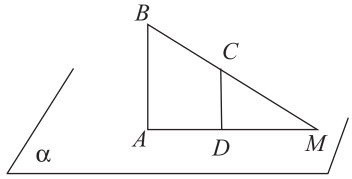


Fig. 4

Cuprins

GEOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU